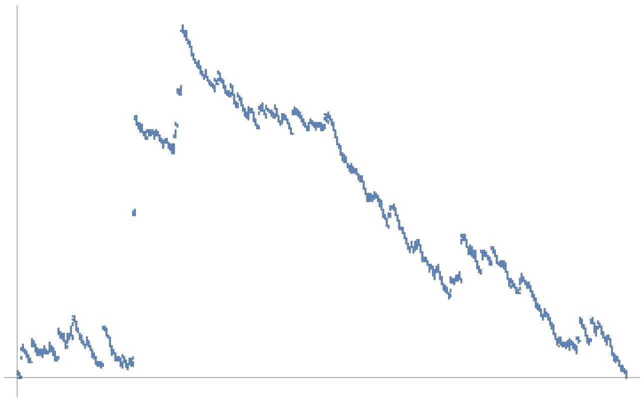
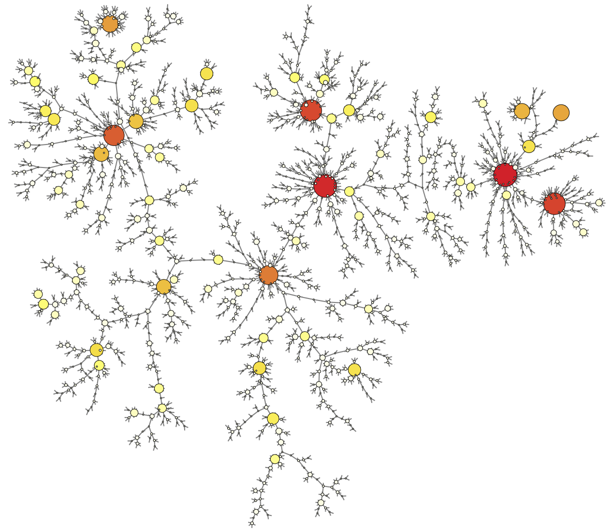
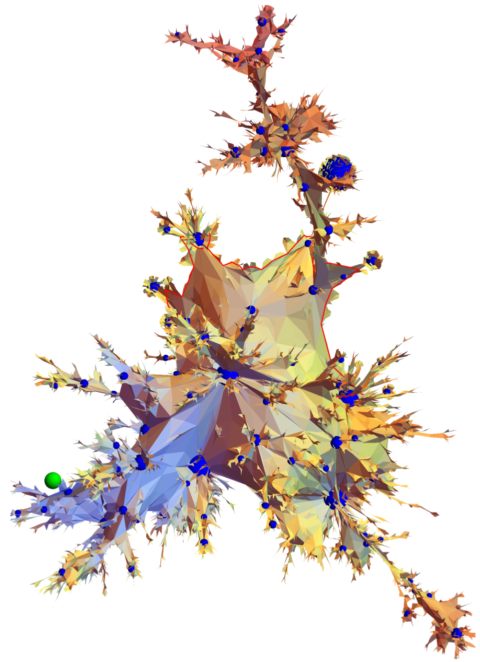
Marches, arbres et cartes aléatoires
... avec des grands degrés

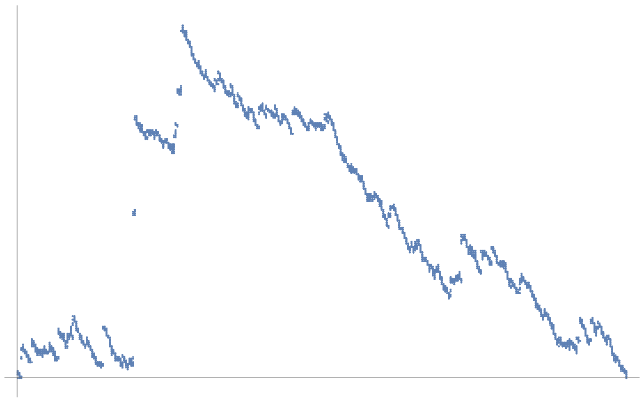
  

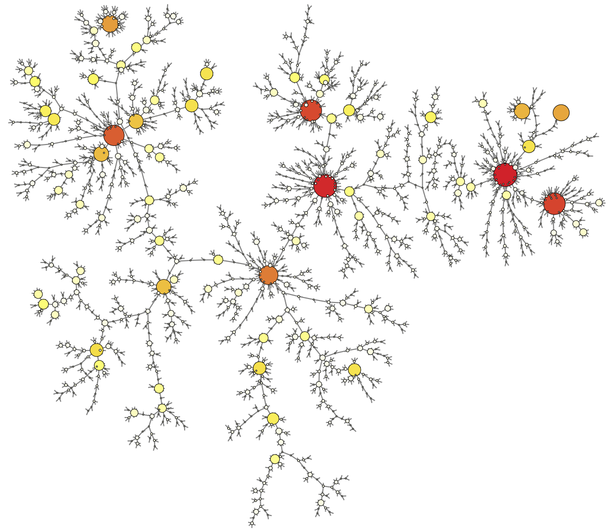
Nicolas Curien (Univ. Paris Saclay†, IUF)

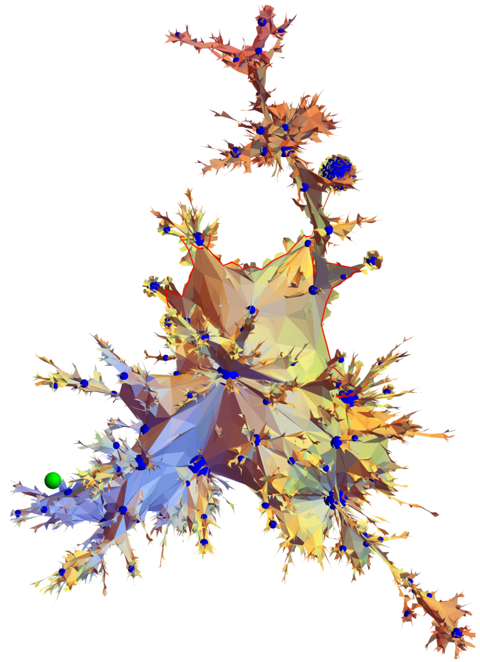
avec O. Bernardi, J. Bertoin, (T. Budd)^2, T. Hutchcroft, (I. Kortchemski)^3,
J.F. Le Gall, C. Marzouk, G. Miermont, A. Nachmias...

Journée Neveu, 2017

Marches, arbres et cartes aléatoires
... avec des grands degrés







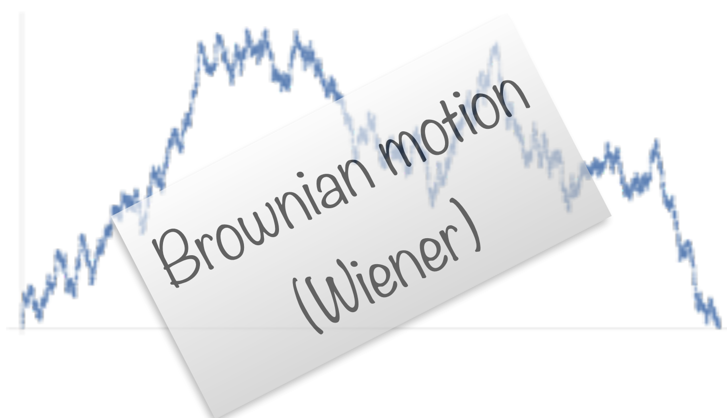
Nicolas Curien (Univ. Paris Saclay†, IUF)

avec O. Bernardi, J. Bertoin, (T. Budd)^2, T. Hutchcroft, (I. Kortchemski)^3, J.F. Le Gall, C. Marzouk, G. Miermont, A. Nachmias...

Journée Neveu, 2017

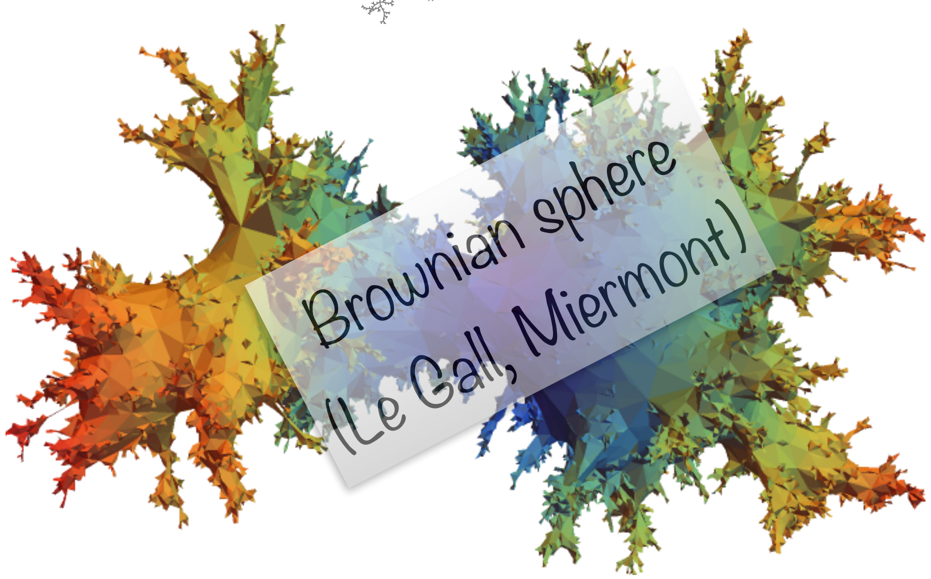
Brownian | Stable

Processes



Trees

Maps



	Brownian	Stable
Processes		
Trees		

Augmented trees

	Brownian	Stable
Maps		

Marches aléatoires

Marches aléatoires

Soit $\mathbf{p} = (p_k)$ une loi de probabilité sur $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ centrée et satisfaisant l'asymptotique

$$p_k \underset{k \to \infty}{\sim} c \cdot k^{-a-1}, \qquad \text{pour } a > 1.$$

On considère (S) la marche aléatoire associée avec pas i.i.d. associée et son excursion positive $(S_i)_{0 \leqslant i \leqslant \theta}$ avec $\theta = \inf\{i \geqslant 0 : S_i < 0\}$. I.e pour toute excursion (x_i) on a

$$\mathbb{P}\Big((S_i)_{0 \leqslant i \leqslant \theta} = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\Big) = \prod_{i=1}^{n} p_{\Delta x_i}.$$

Marches aléatoires

Soit $\mathbf{p} = (p_k)$ une loi de probabilité sur $\{-1, 0, 1, 2, ...\}$ centrée [2] et satisfaisant l'asymptotique

$$p_k \underset{k\to\infty}{\sim} c \cdot k^{-a-1}, \qquad \text{pour } a > 1.$$

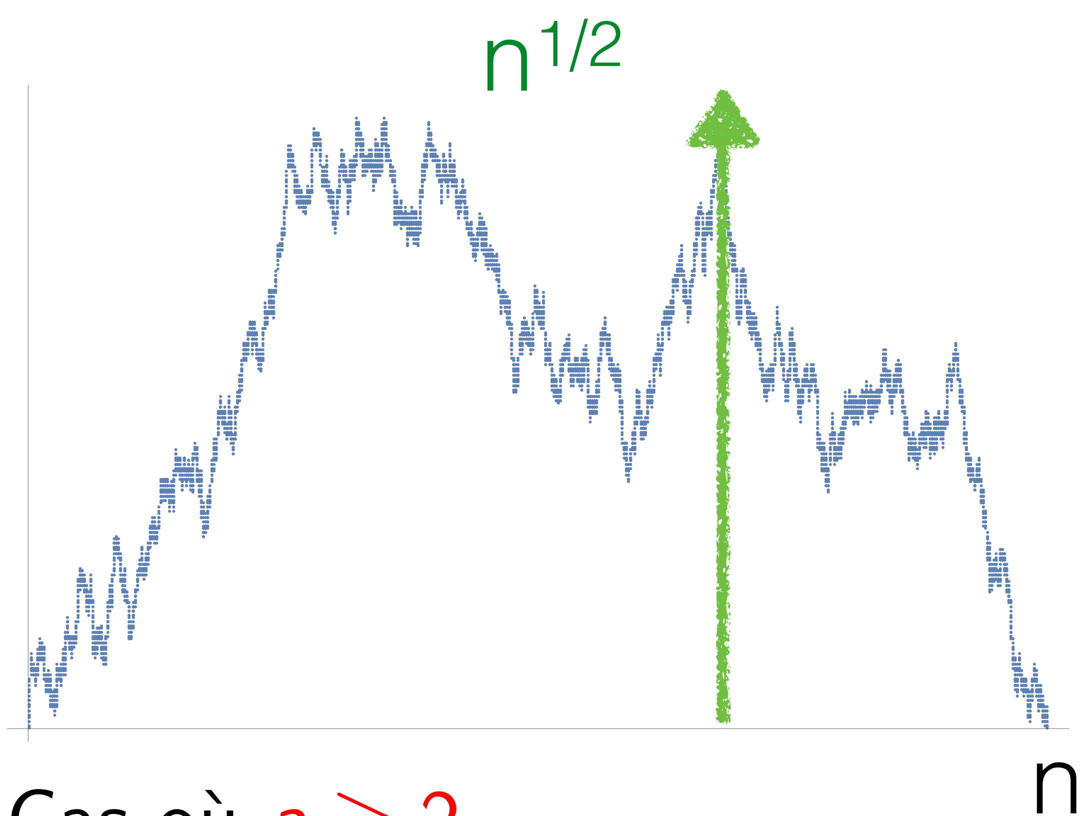
On considère (S) la marche aléatoire associée avec pas i.i.d. associée et son excursion positive $(S_i)_{0\leqslant i\leqslant\theta}$ avec $\theta = \inf\{i \geqslant 0 : S_i < 0\}$. I.e pour toute excursion (x_i) on a

$$\mathbb{P}\Big((S_i)_{0\leqslant i\leqslant\theta} = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}\Big) = \prod_{i=1}^{n} p_{\Delta x_i}.$$

2. La criticalité de $\mathbf{p}$ est équivalente à dire que $\theta < \infty$ mais $\mathbb{E}[\theta] = \infty$.

Premiers dessins

On a des comportements différents (pour les grandes excursions) :



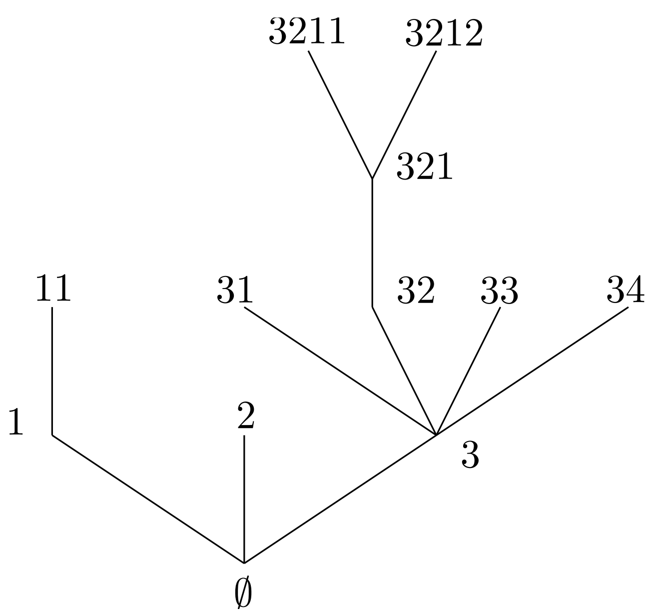
Cas où $a \geqslant 2$
Mouvement Brownien

Cas où $a \in (1, 2)$.
Processus de Lévy a-stable.

Arbres aléatoires

Arbres de Galton-Watson

Avec les mêmes hypothèses sur $\mathbf{p}$ on considère un arbre aléatoire plan T dit de $\mathbf{p}$-BGW de loi donnée par

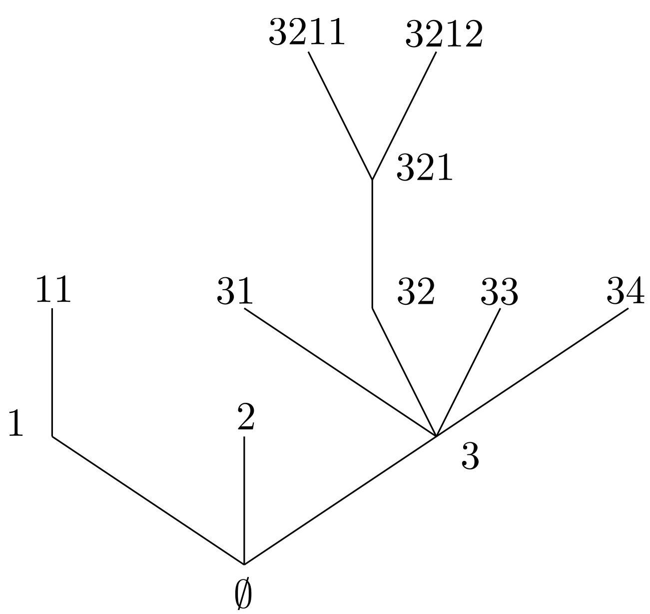


$$\mathbb{P}\Big(T = \tau\Big) = \prod_{u \in \tau} p_{k_u}$$

Un arbre plan τ, les nombres d'enfants sont notés $\{k_u : u \in \tau\}$.

Arbres de Galton-Watson

Avec les mêmes hypothèses [3] sur $\mathbf{p}$ on considère un arbre aléatoire plan T dit de $\mathbf{p}$-BGW de loi donnée par



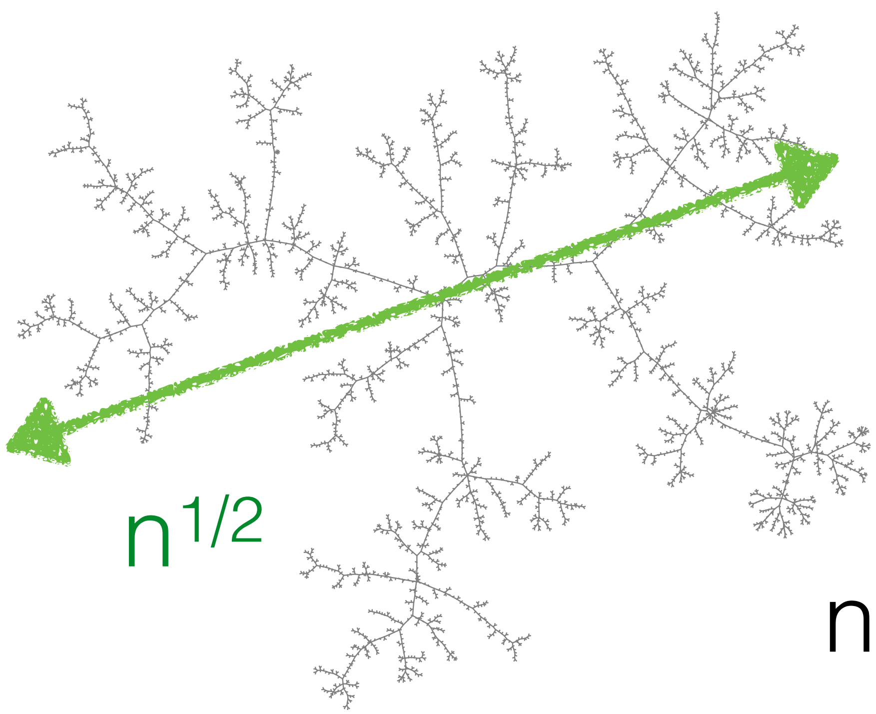
$$\mathbb{P}\Big(T = \tau\Big) = \prod_{u \in \tau} p_{k_u}$$

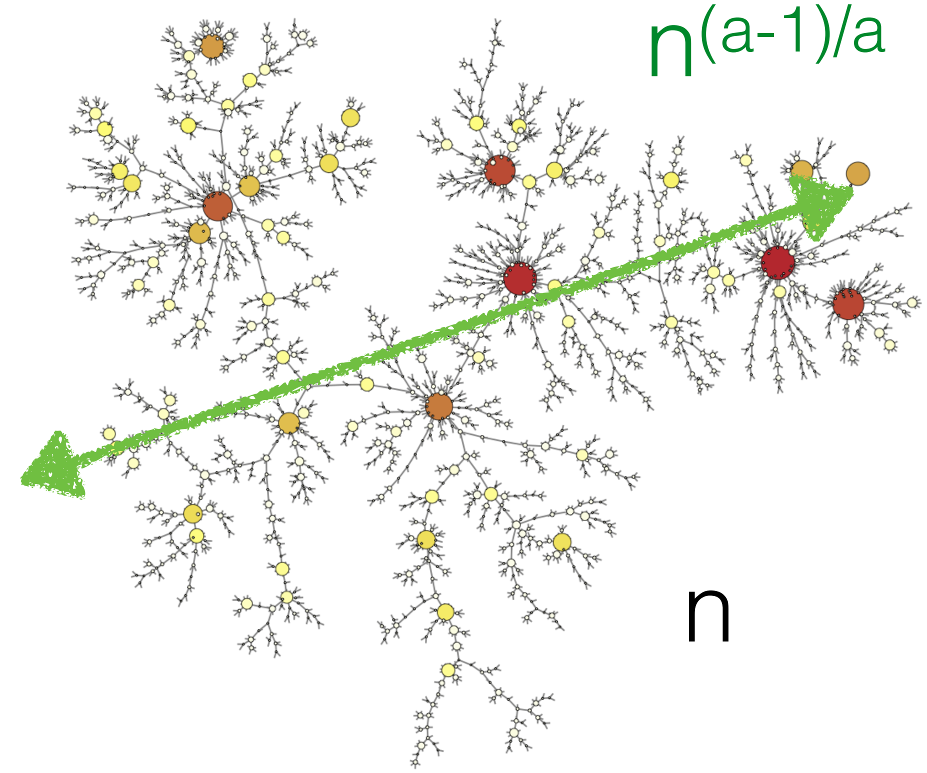
Un arbre plan τ, les nombres d'enfants sont notés $\{k_u : u \in \tau\}$.

3. La criticalité ici est équivalente à dire que $|\tau| < \infty$ p.s. mais $\mathbb{E}[\tau] = \infty$

D'autres dessins

Ici aussi, des comportements géométriques très différents en fonction de a :





Cas où $a \geqslant 2$
Arbre Brownien
(Aldous)

Cas où $a \in (1, 2)$.
Arbre a-stable
(Duquesne, Le Gall, Le Jan).

Des arbres aux marches

Dépendant d'un procédé d'exploration :

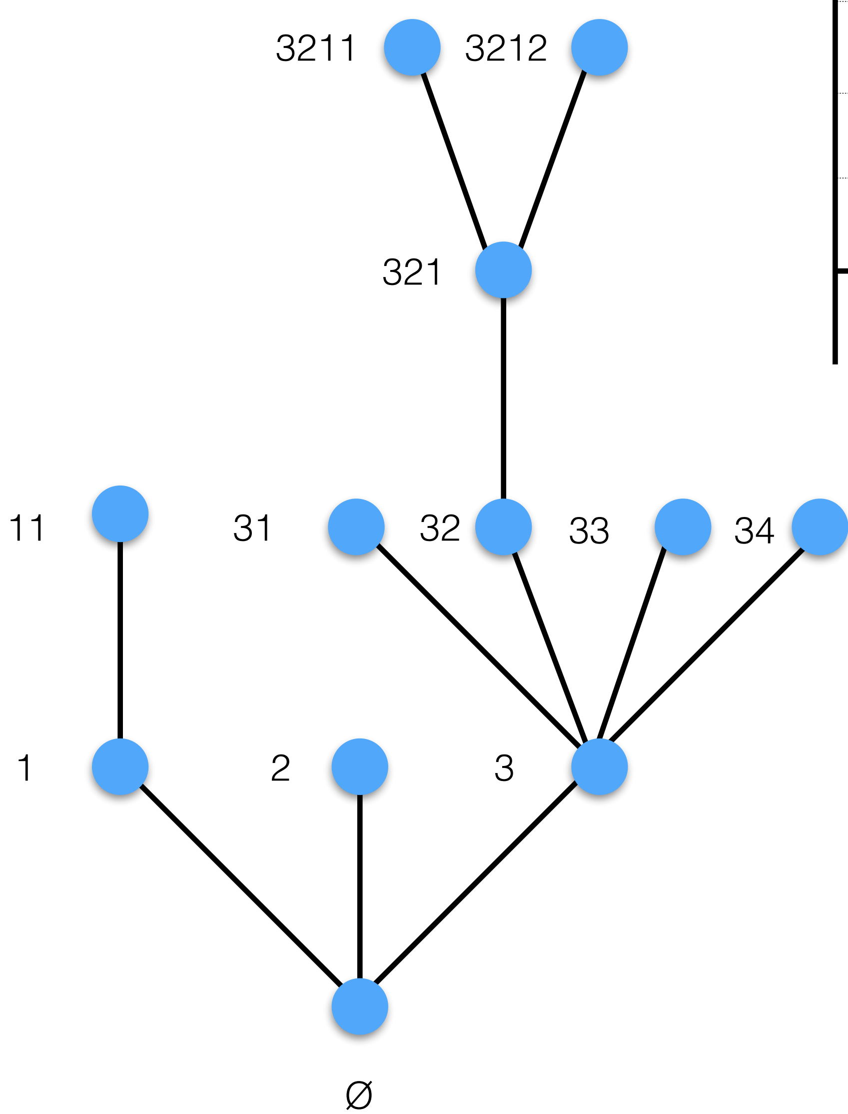
- parcours en profondeur,
- parcours en largeur,
- exploration "uniforme",
- ...

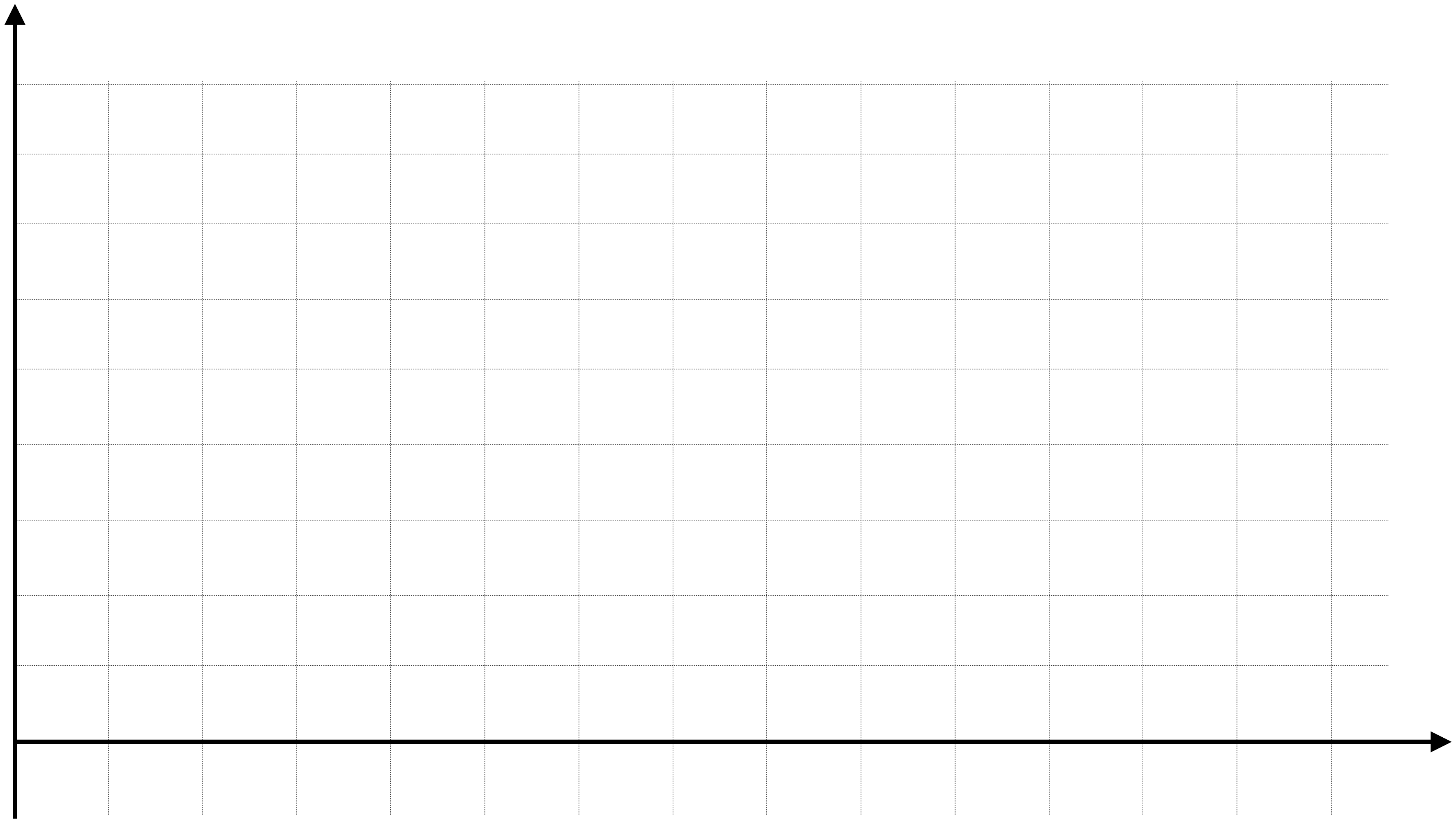
Des arbres aux marches

Dépendant d'un procédé d'exploration :

- parcours en profondeur,
- parcours en largeur,
- exploration “uniforme”,
- ...

Durant l'exploration on enregistre le nombre de sommets “en mémoire” à visiter ultérieurement (moins 1). L'exploration s'arrête lorsqu'il n'y a plus de sommets à visiter.



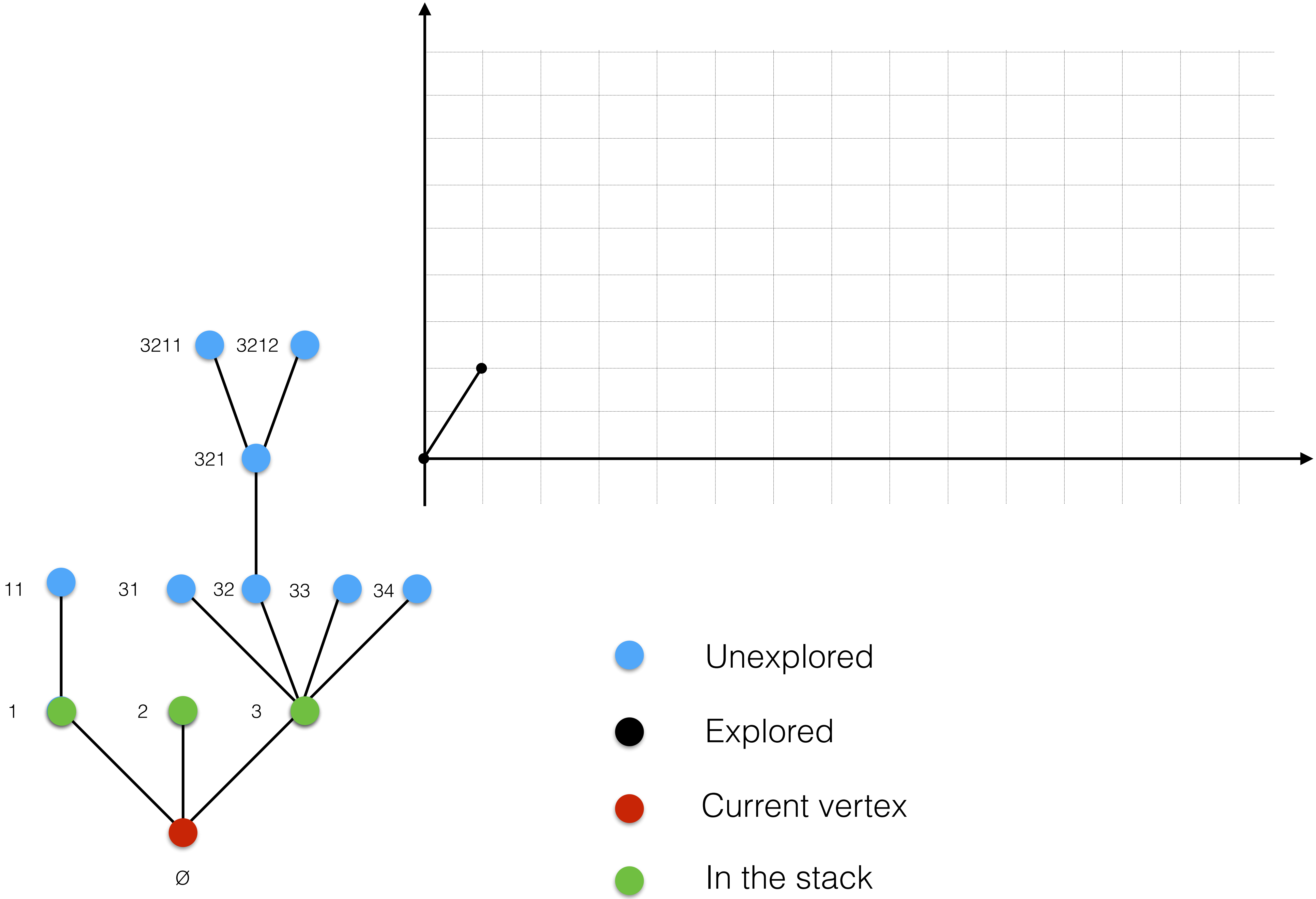


Unexplored

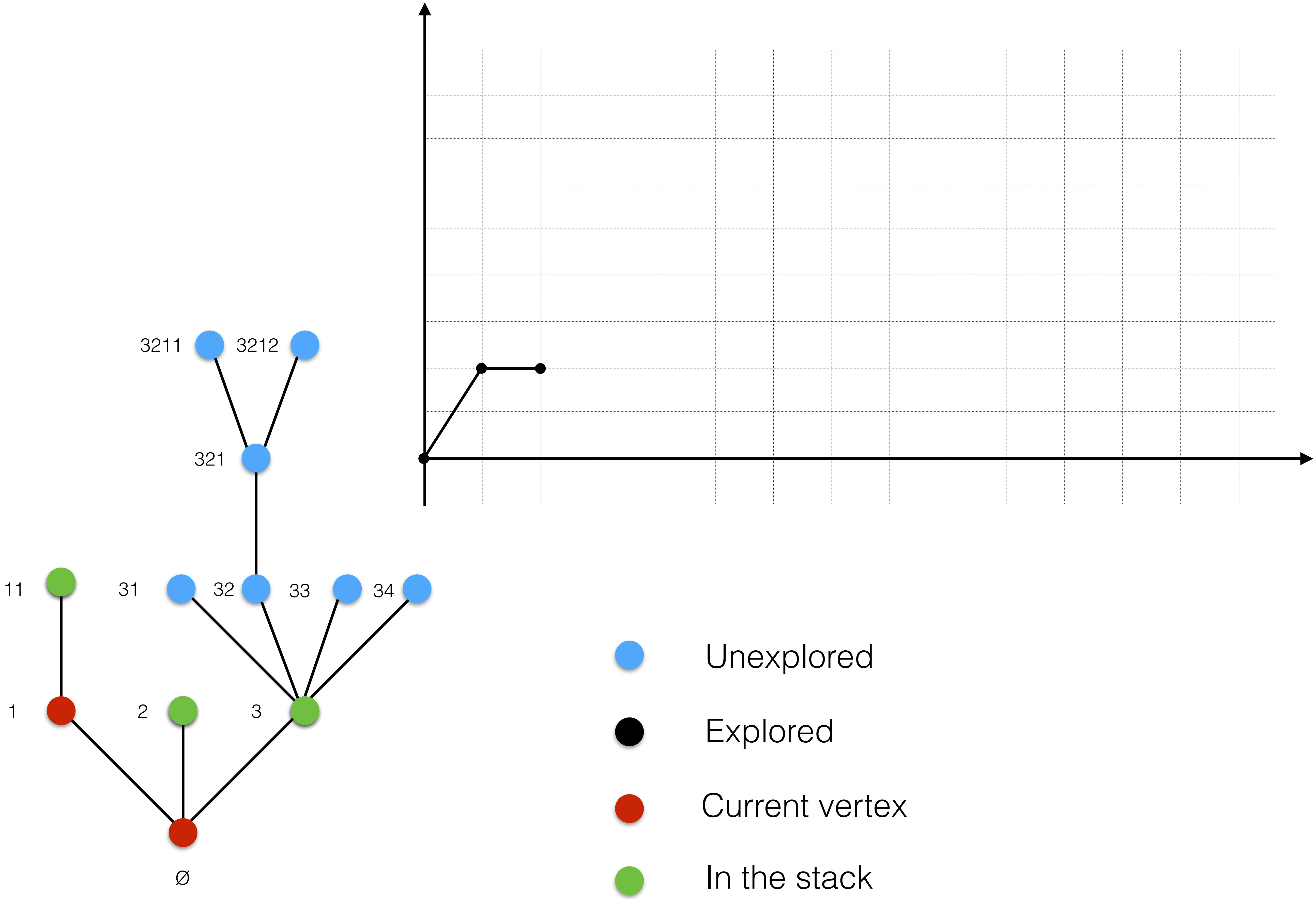
Explored

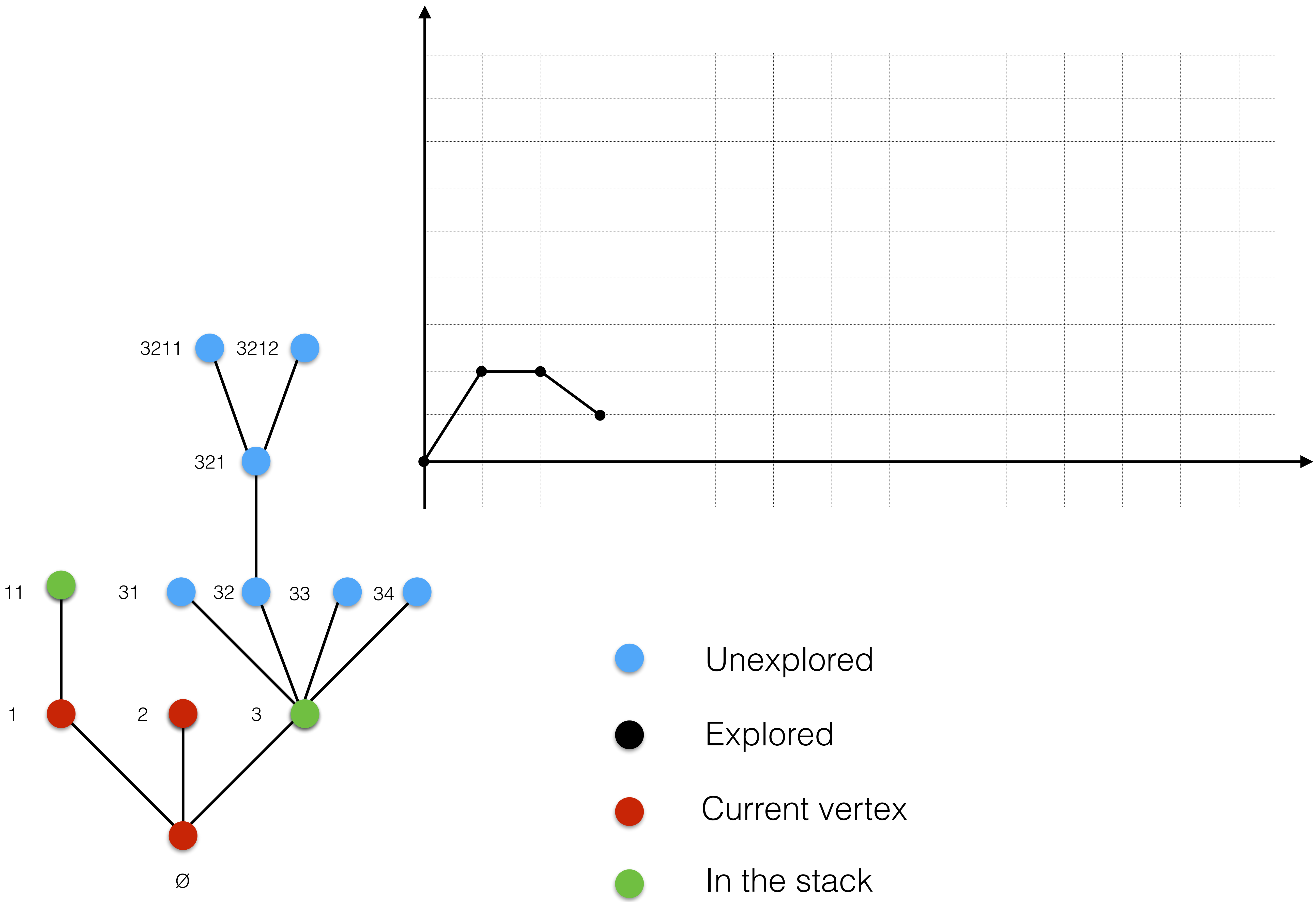
Current vertex

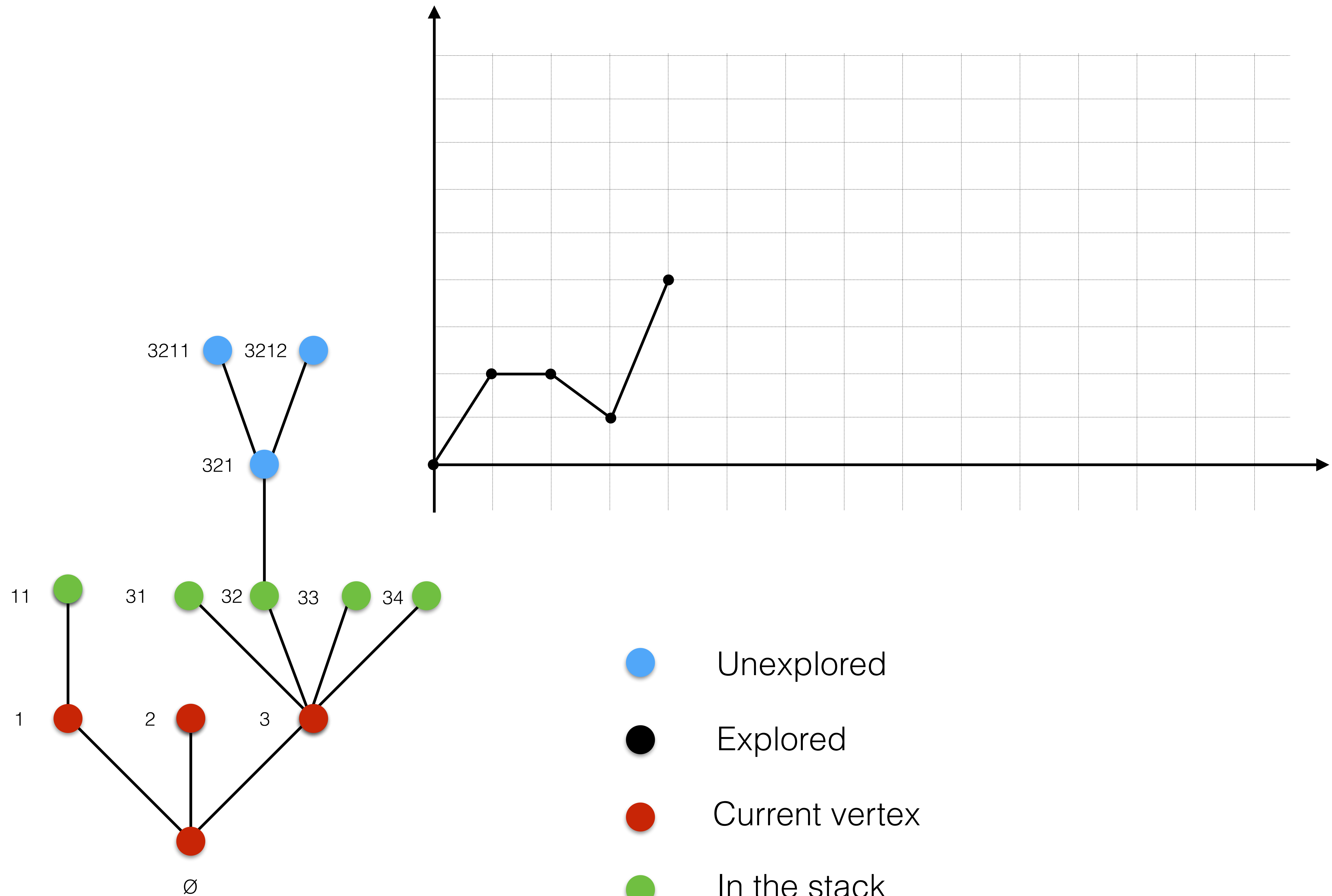
In the stack

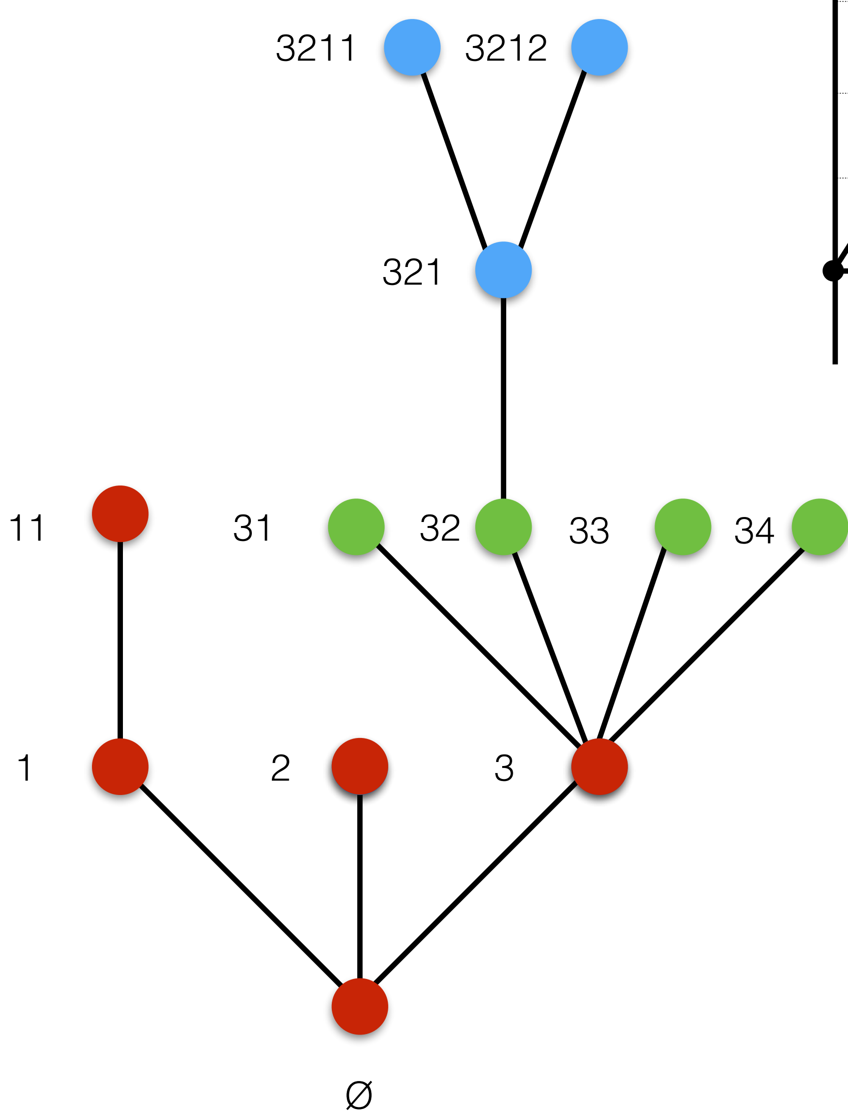


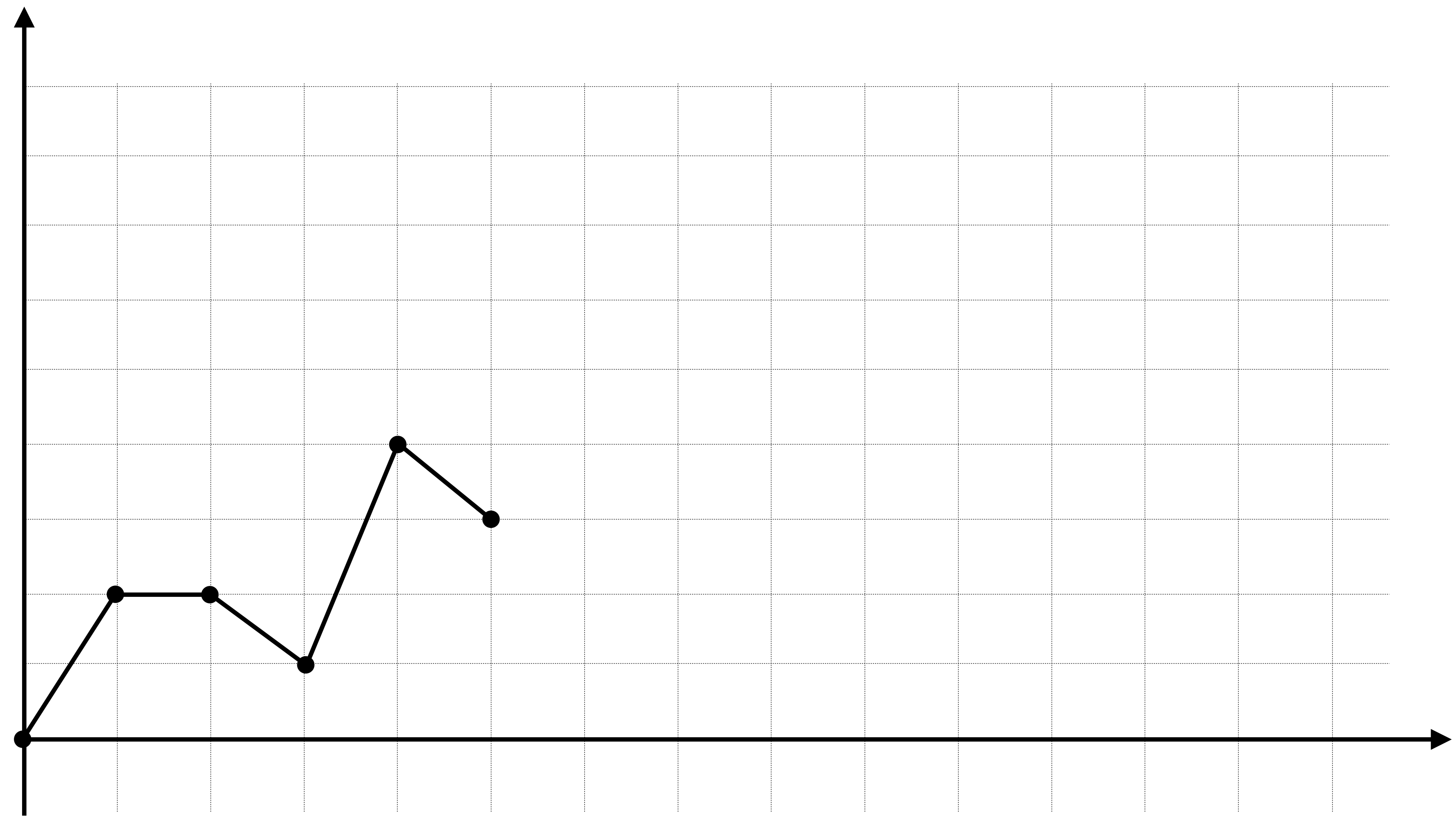
3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
∅
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
Ø
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
∅
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
Ø
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack



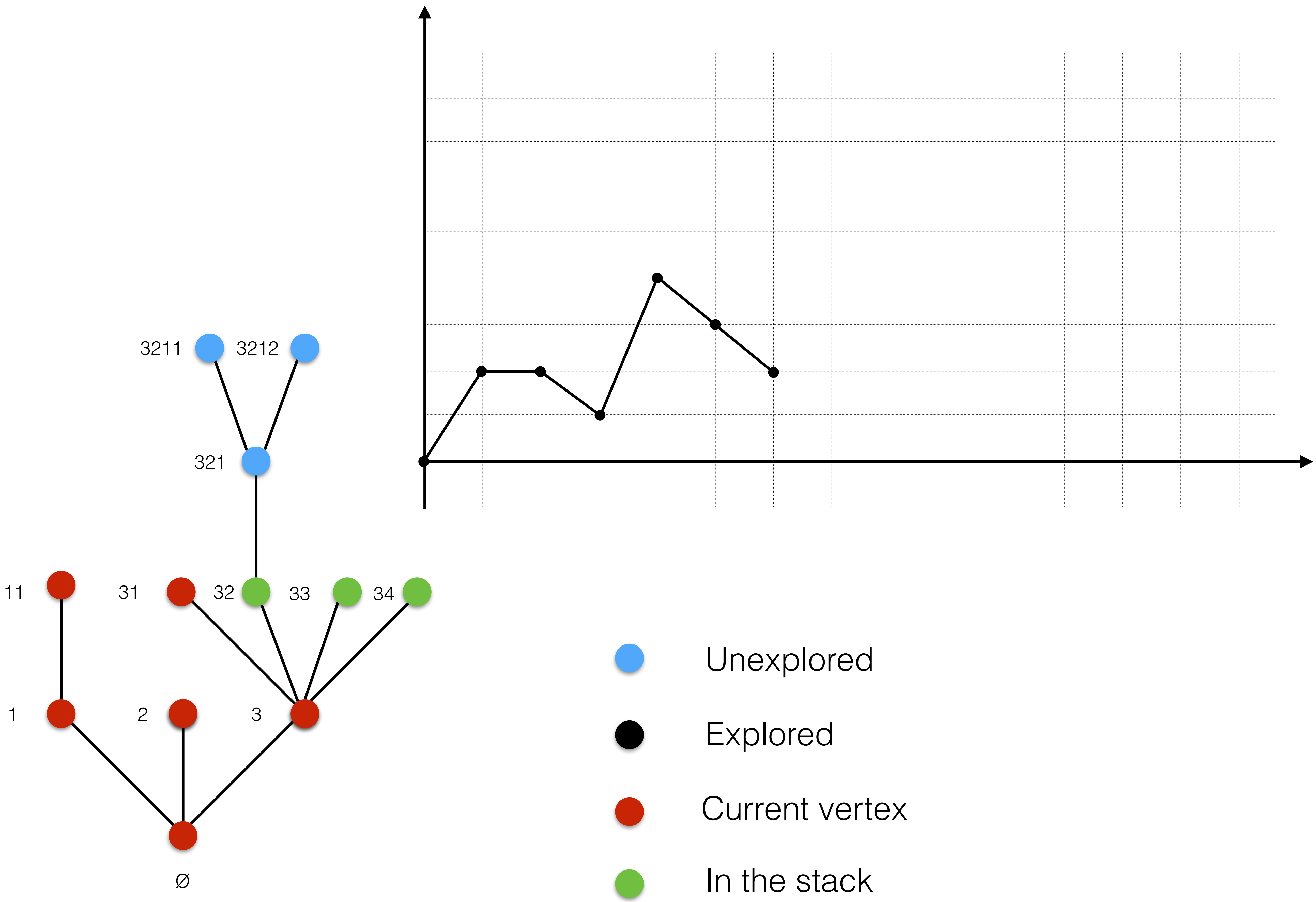


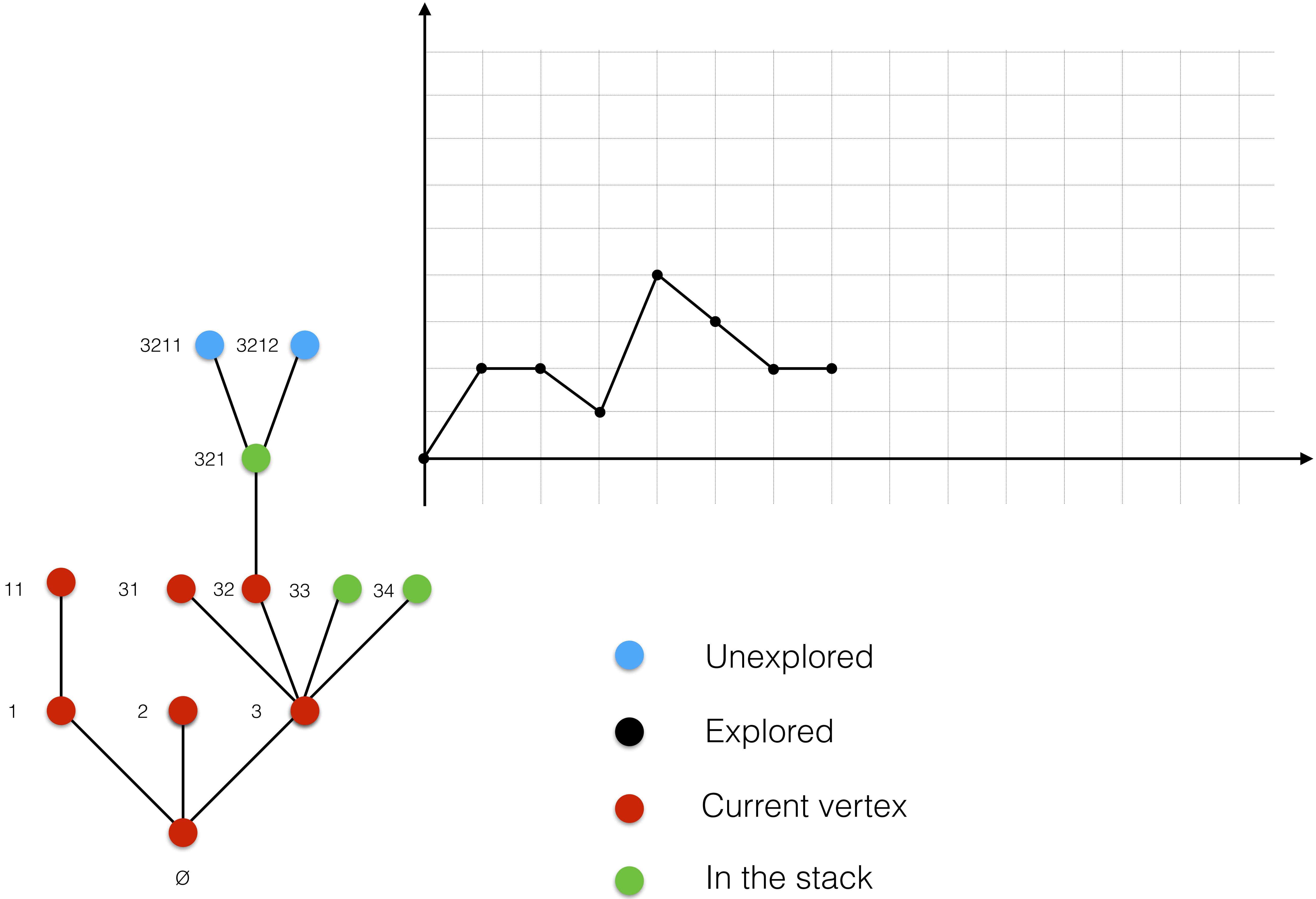
Unexplored

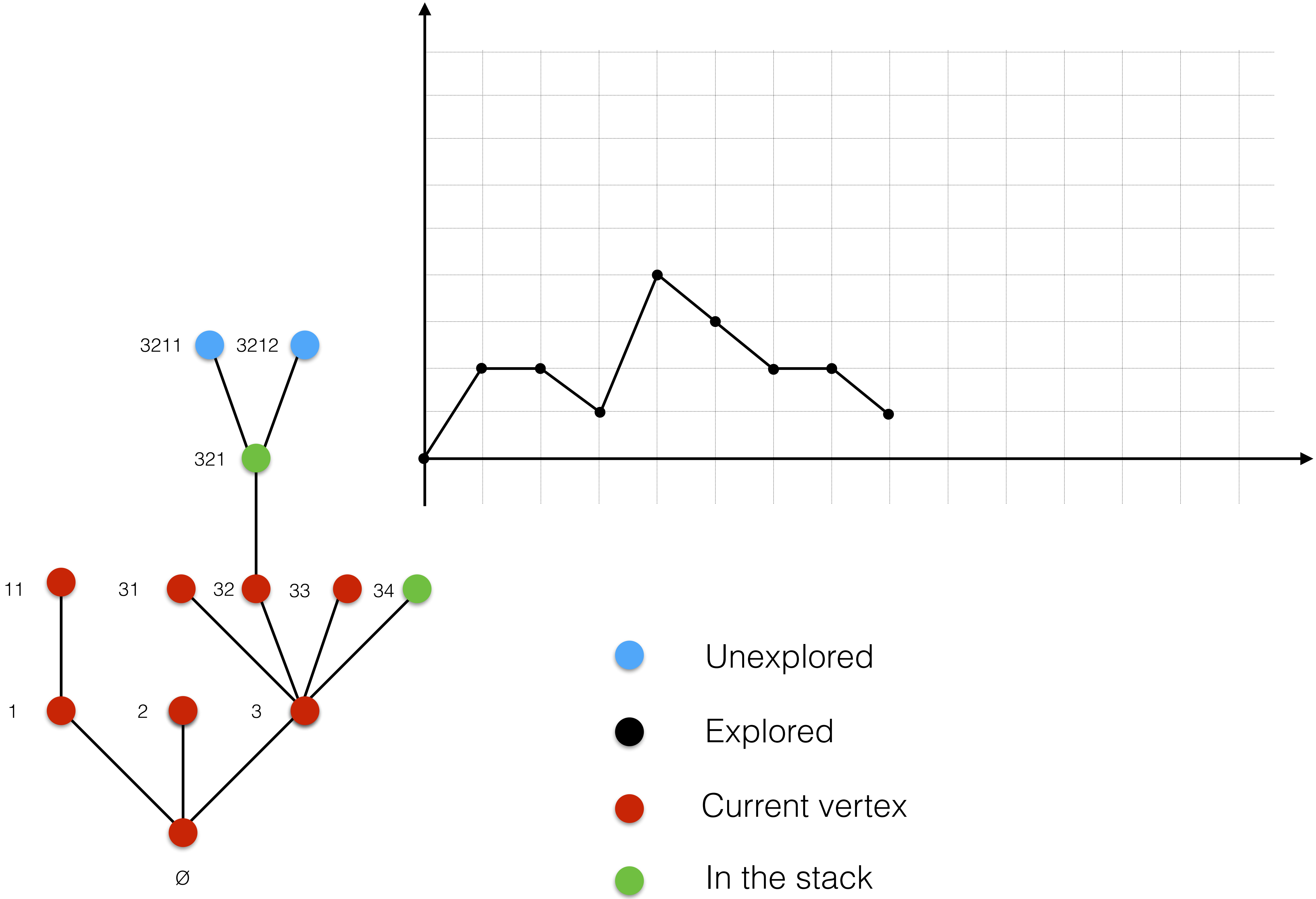
Explored

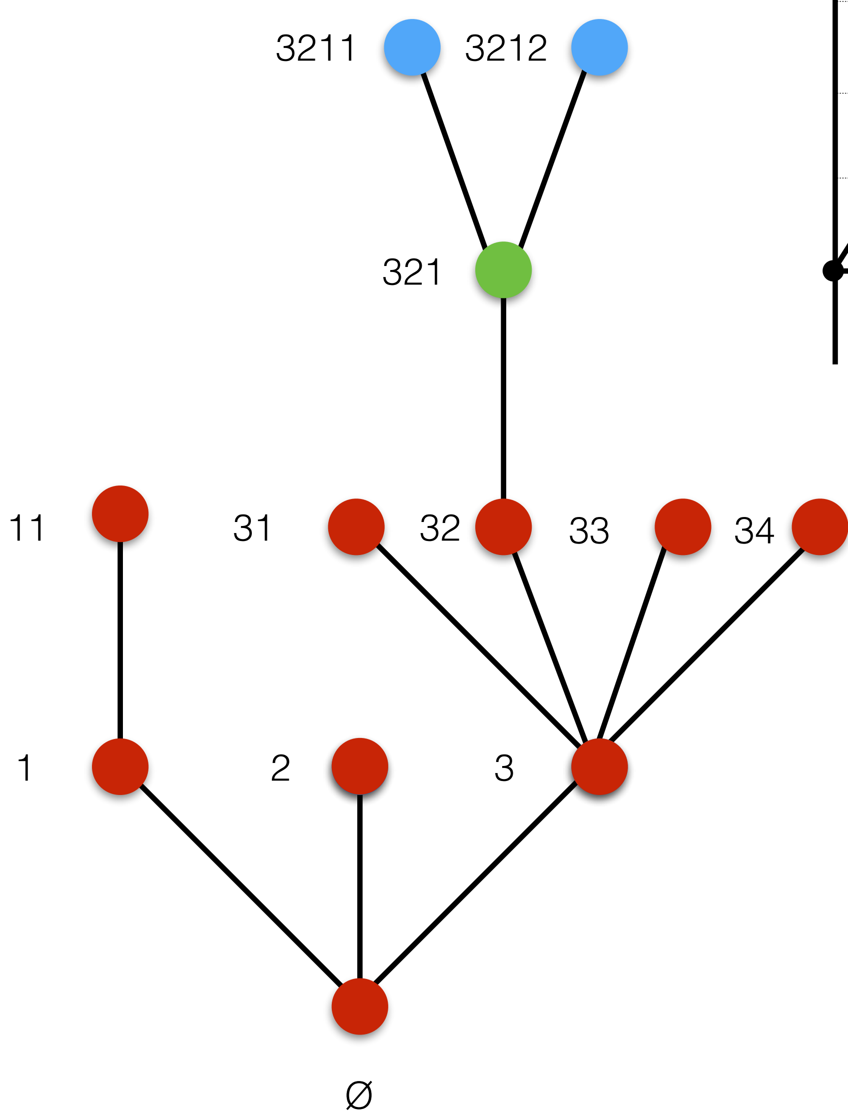
Current vertex

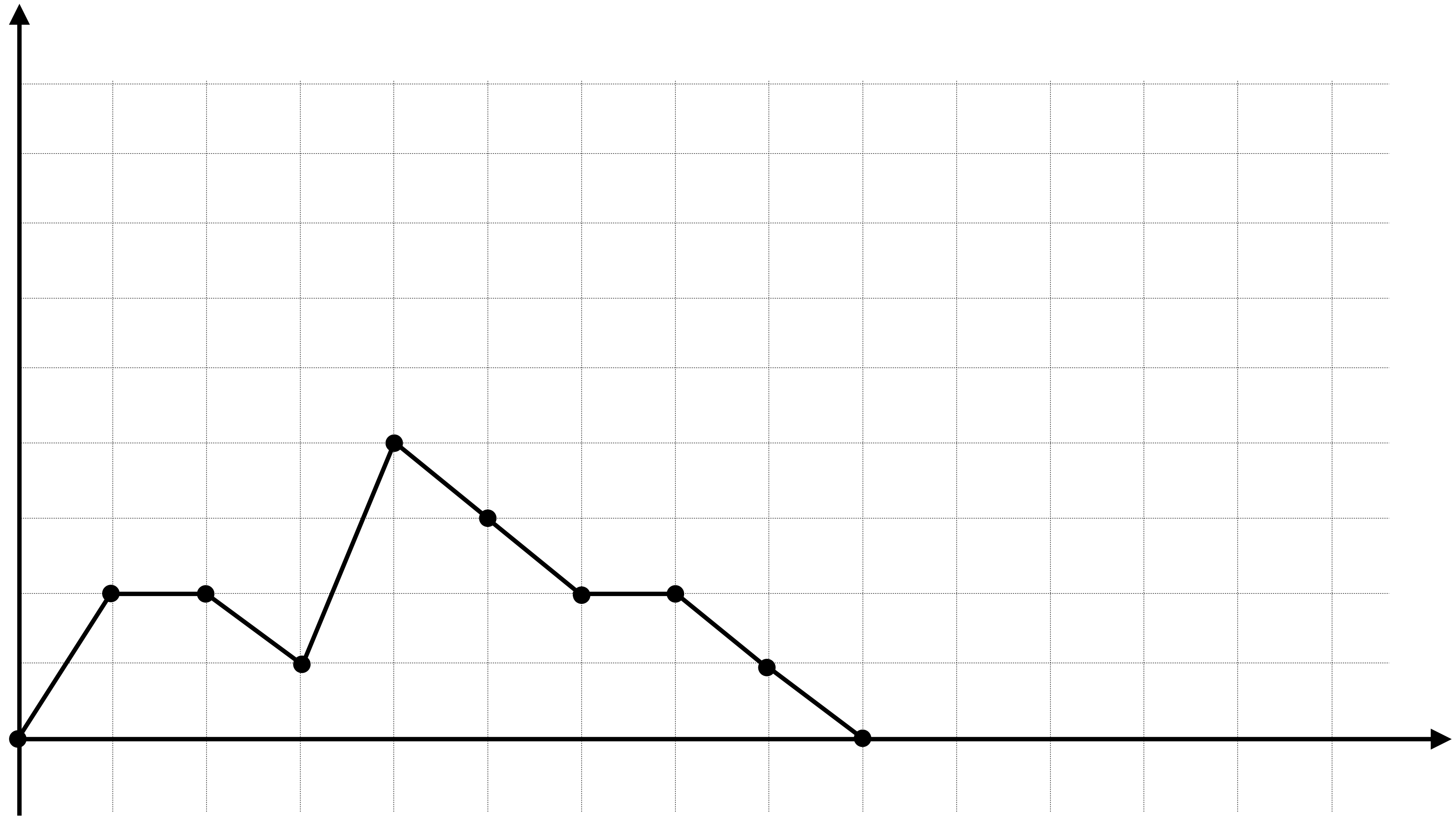
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
∅
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
Ø
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
∅
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack



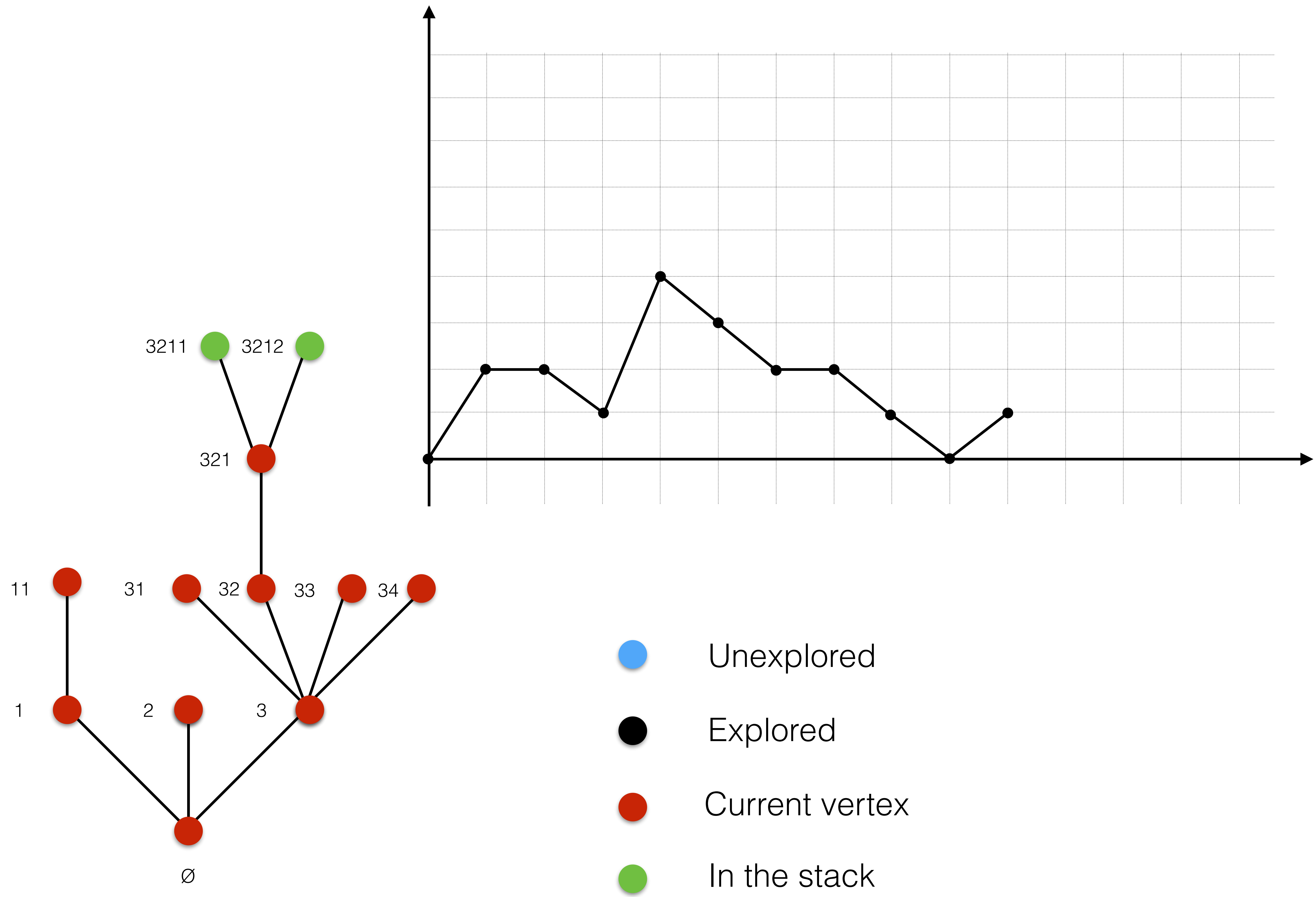


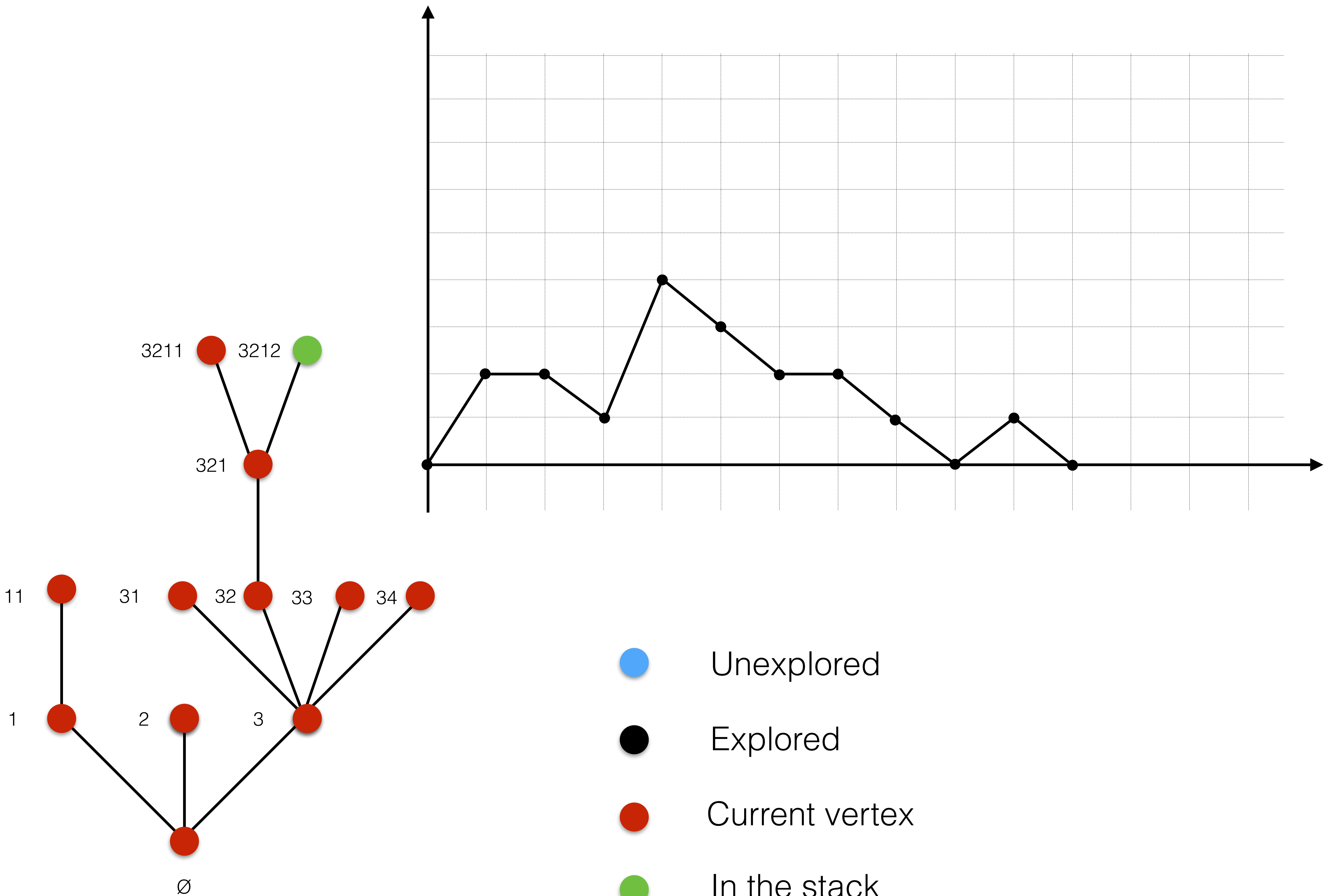
Unexplored

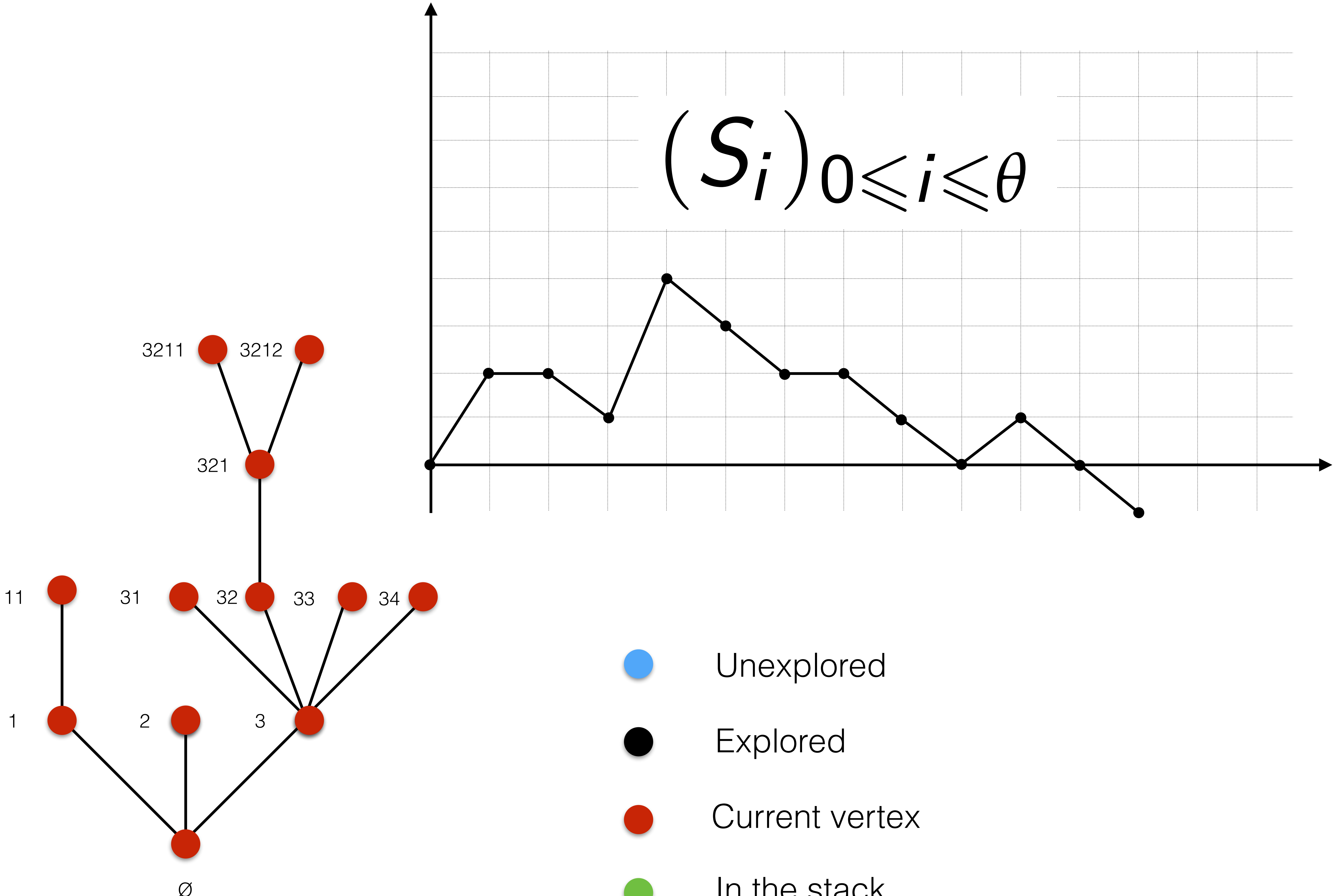
Explored

Current vertex

In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
Ø
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack


3211
3212
321
11
31
32
33
34
1
2
3
∅
Unexplored
Explored
Current vertex
In the stack



Unexplored

Explored

Current vertex

In the stack

Des arbres augmentés

Les looptrees

Si τ est un arbre plan alors $\mathrm{Loop}(\tau)$ est son looptree :

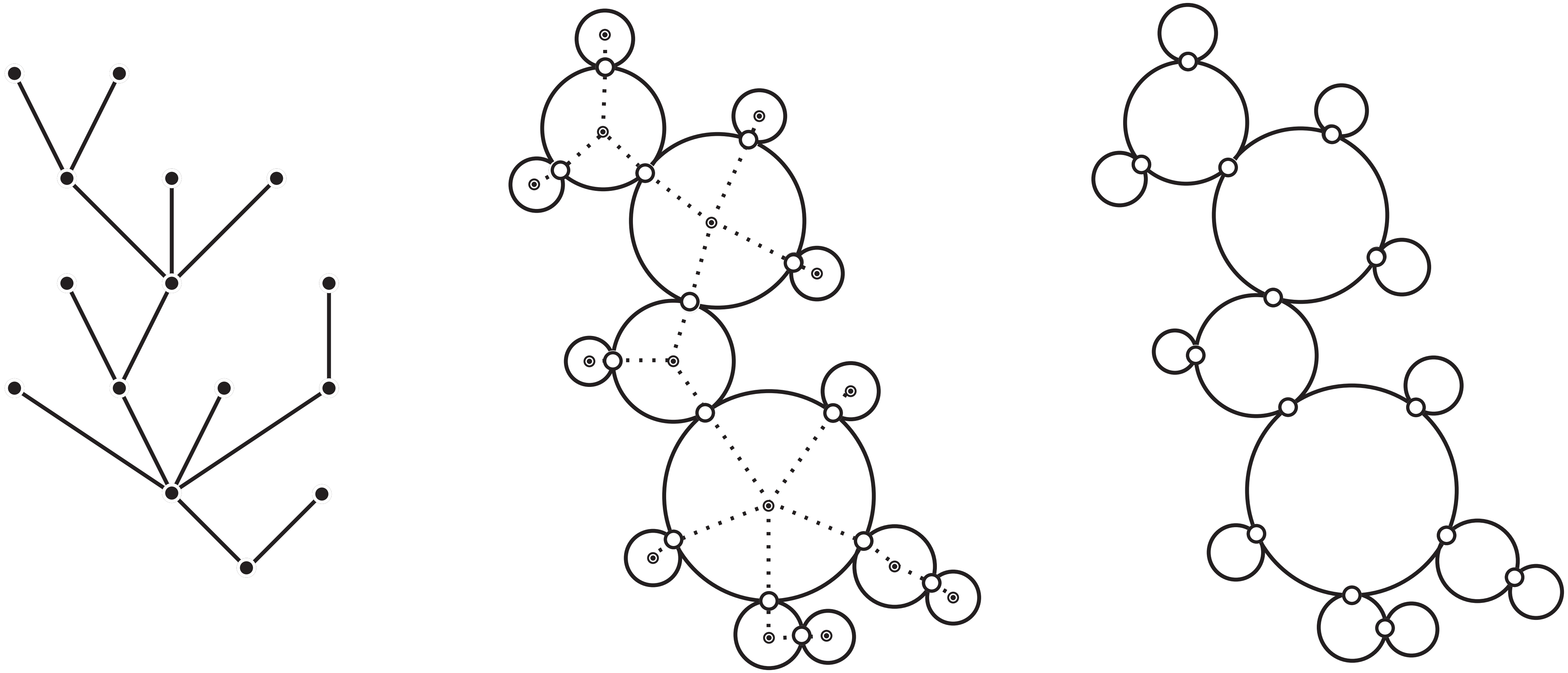
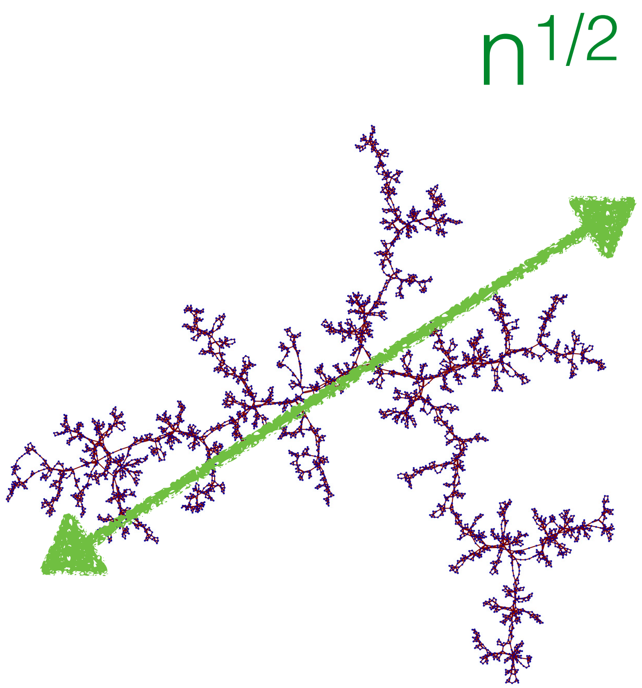
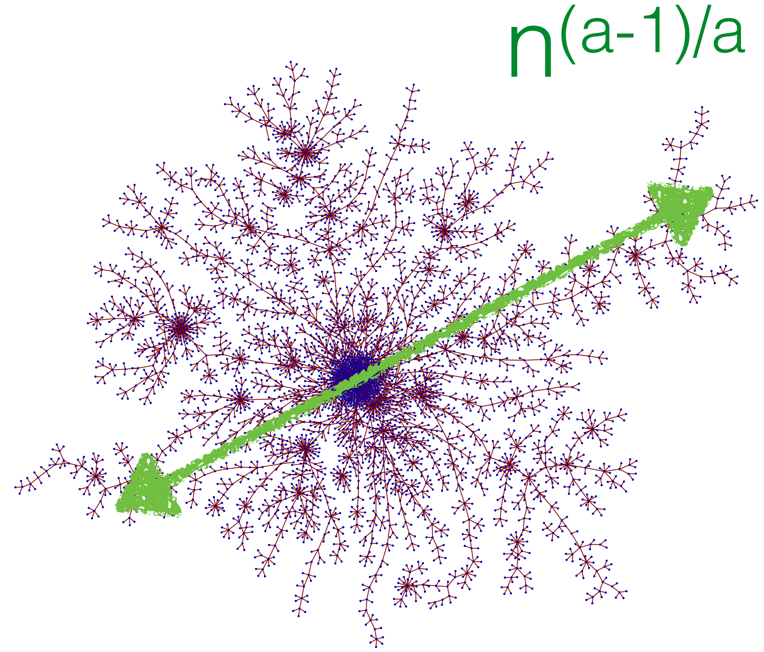


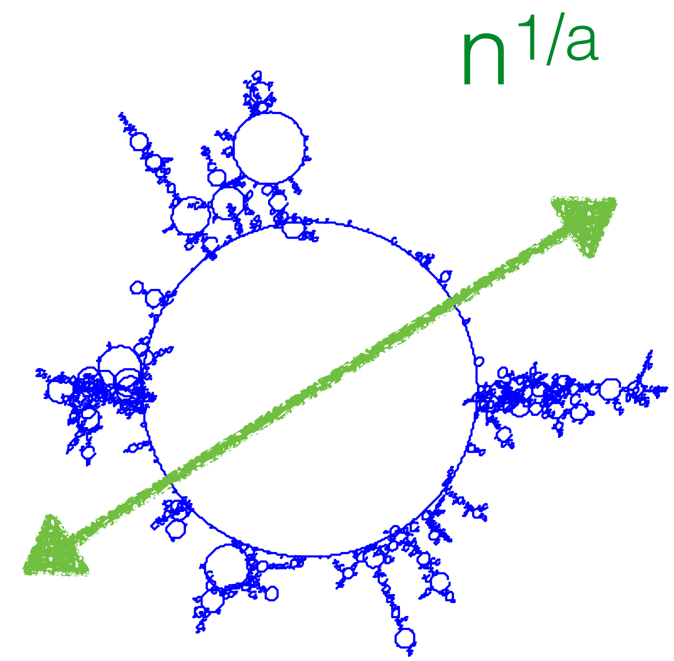
Figure – Un arbre et son looptree

Encore des dessins (2)

Ici aussi, des comportements géométriques très différents en fonction de a :





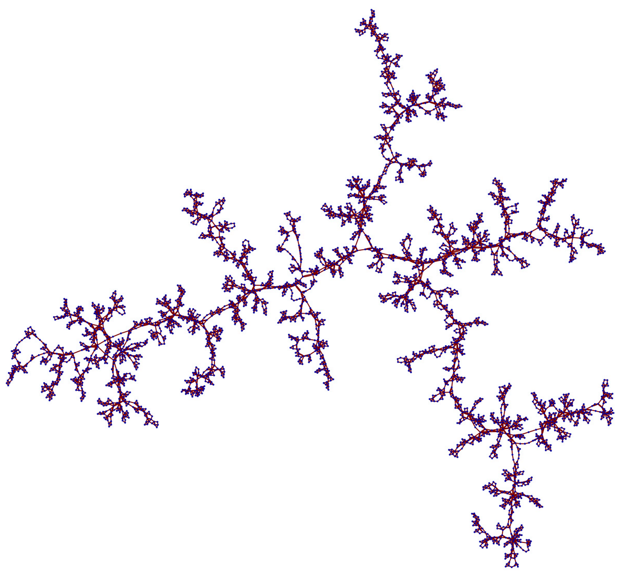


Cas où $a \geqslant 2$
$\rightarrow$ Arbre Brownien

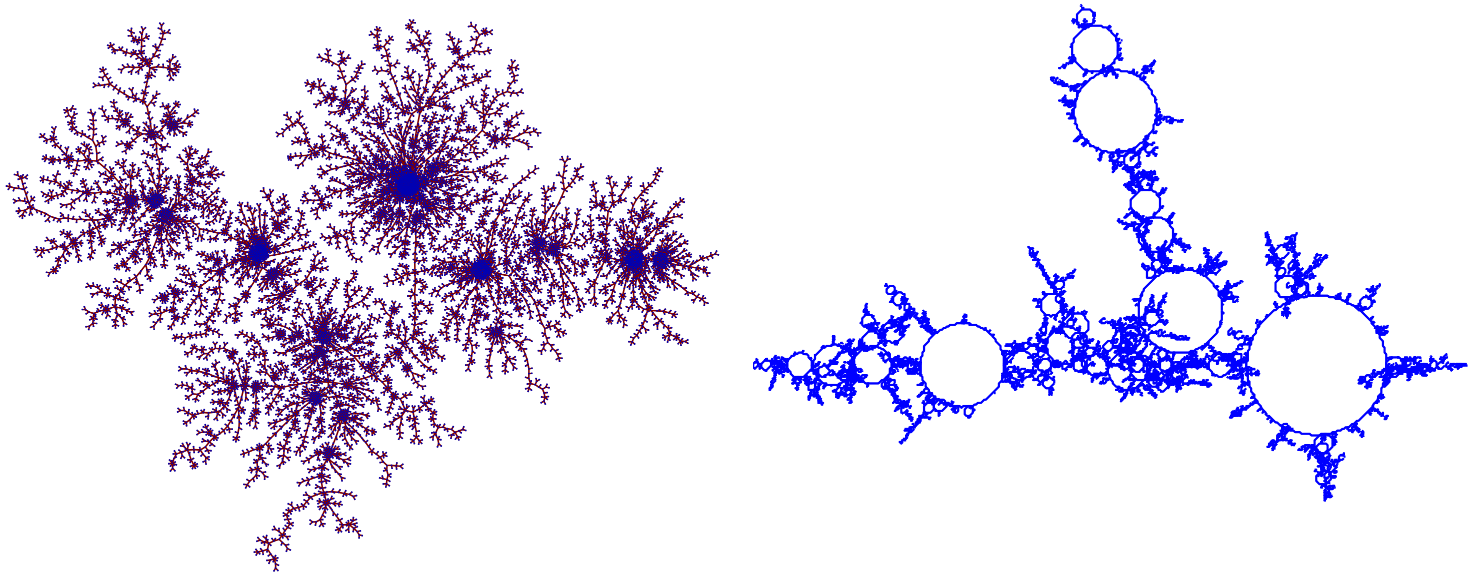
Cas où $a \in (1, 2)$
Looptrees a-stable (C., Kortchemski).

Encore des dessins (2)

Ici aussi, des comportements géométriques très différents en fonction de a :



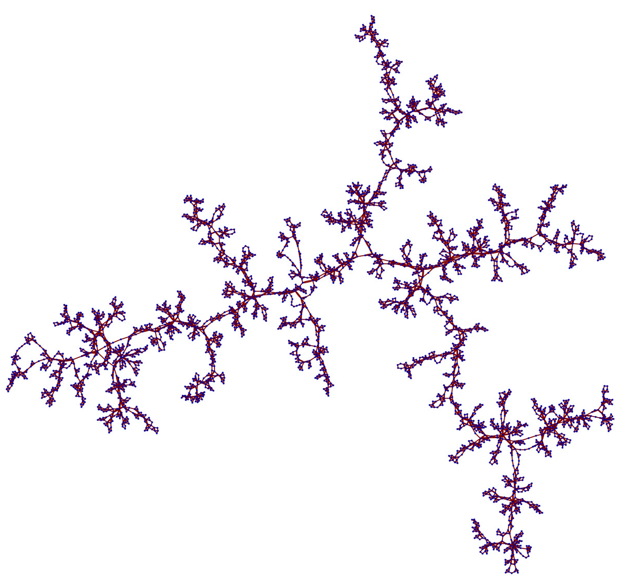
Cas où $a \geqslant 2$
$\rightarrow$ Arbre Brownien

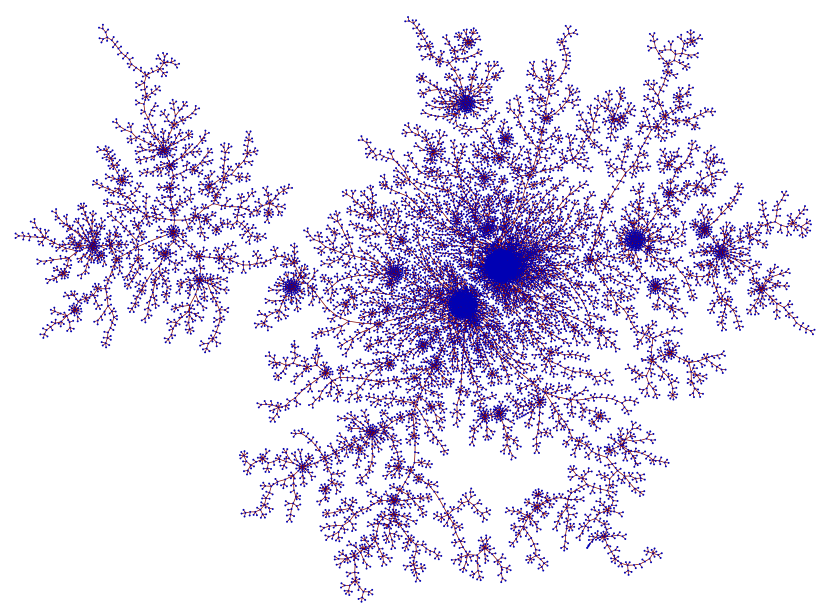


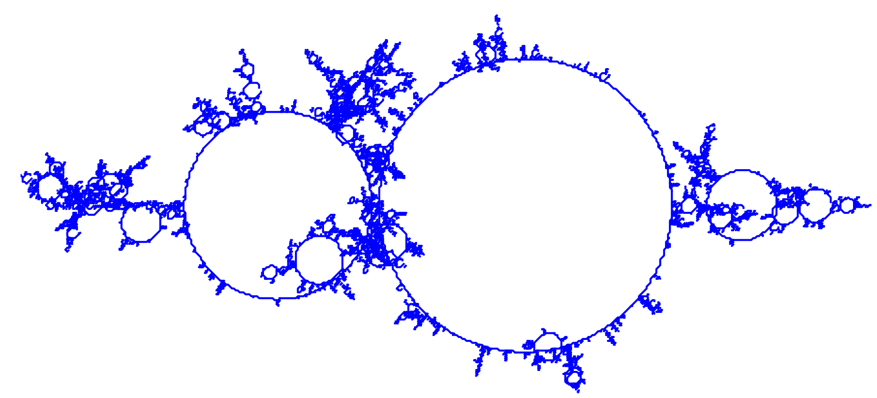
Cas où $a \in (1,2)$
Looptrees a-stable (C., Kortchemski).

Encore des dessins (2)

Ici aussi, des comportements géométriques très différents en fonction de a :





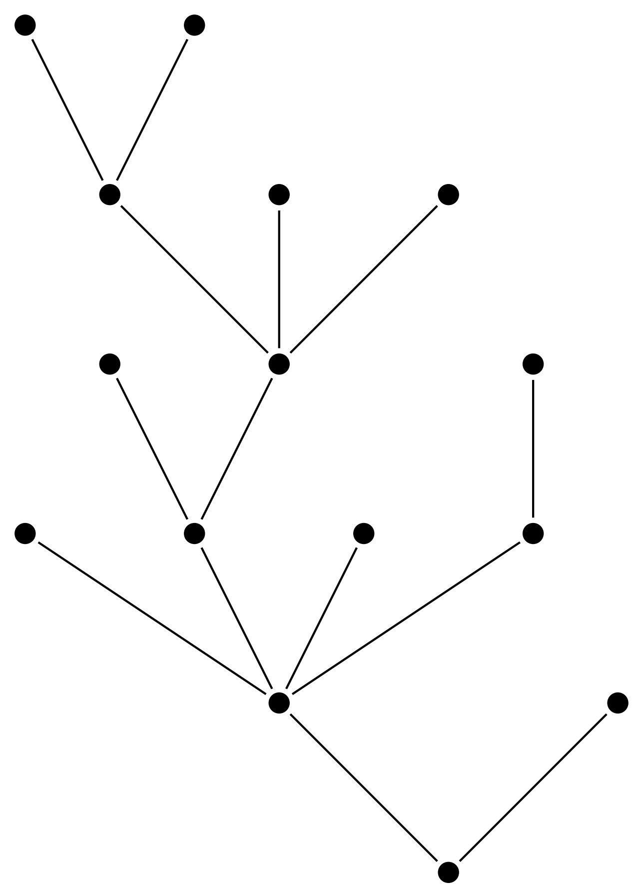


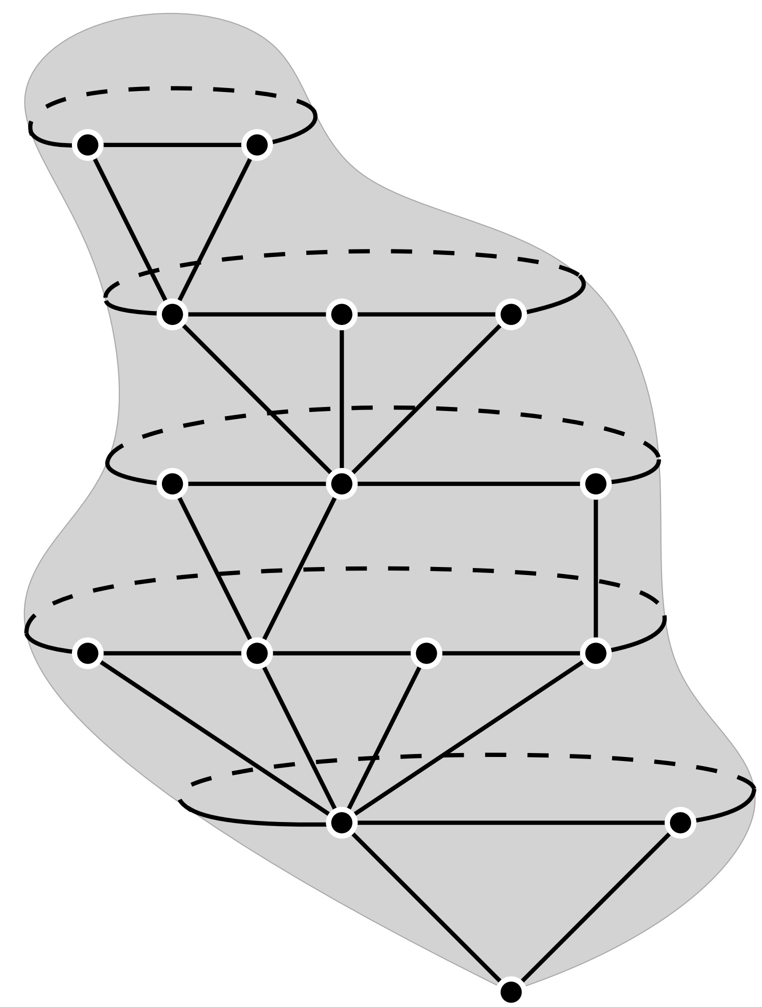
Cas où $a \geqslant 2$
$\rightarrow$ Arbre Brownien

Cas où $a \in (1, 2)$
Looptrees a-stable (C., Kortchemski).

Les cartes causales

Si τ est un arbre plan on note $\mathrm{Causal}(\tau)$ le graphe formé par l'ajout des connexions horizontales :





Encore des dessins (3)

On commence par $a \geqslant 2$

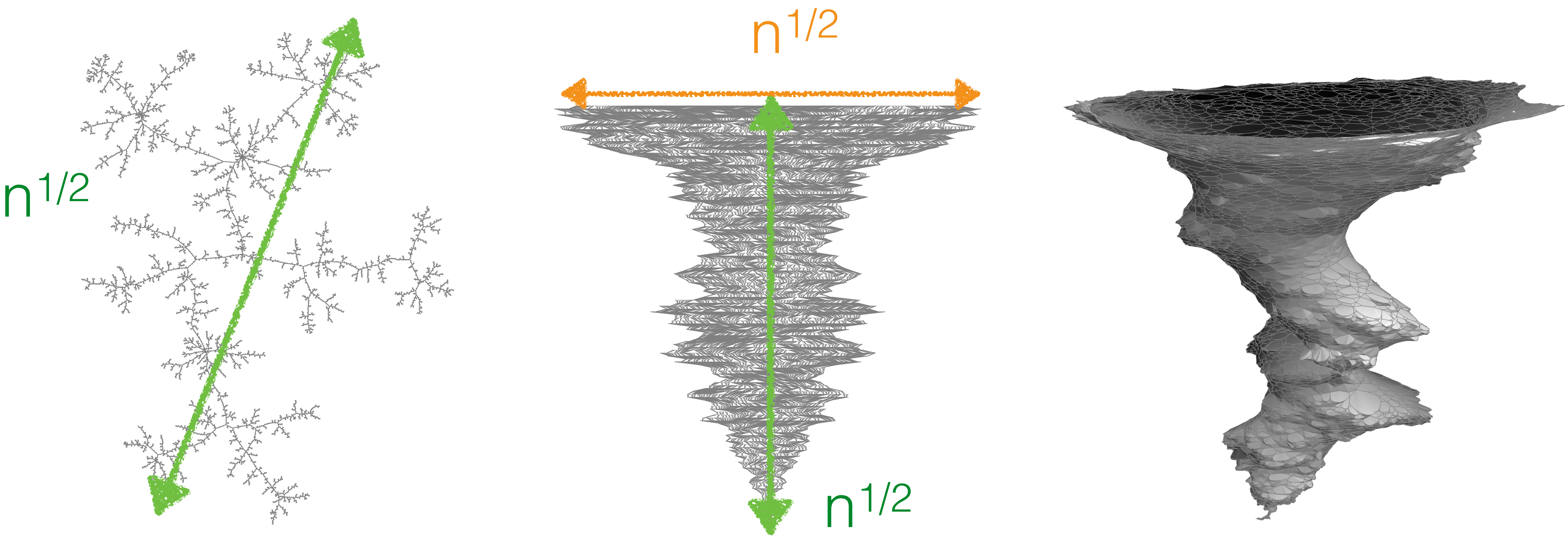


Figure – Un grand arbre (tronqué), la représentation en hauteur et la géométrie causale associée

Encore des dessins (3)

Ici $a = 1.8$

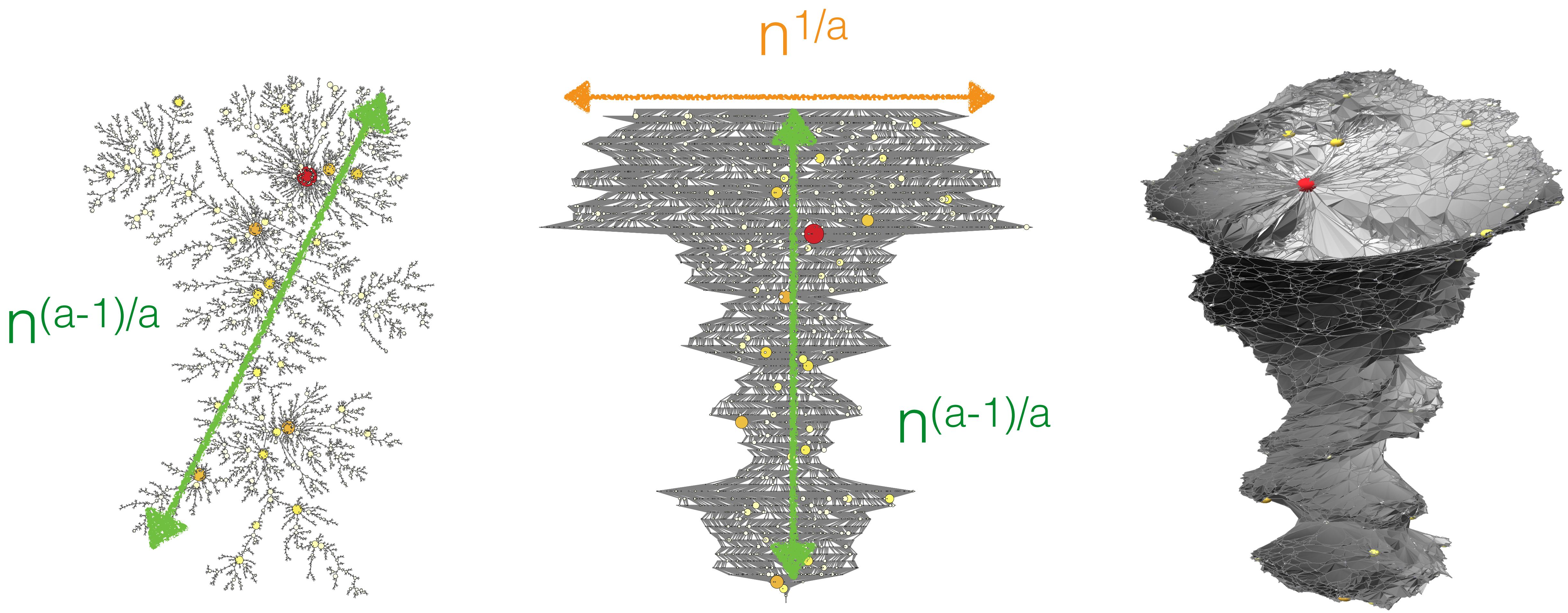


Figure – Un grand arbre (tronqué), la représentation en hauteur et la géométrie causale associée

Encore des dessins (3)

Maintenant $a = 1.7$

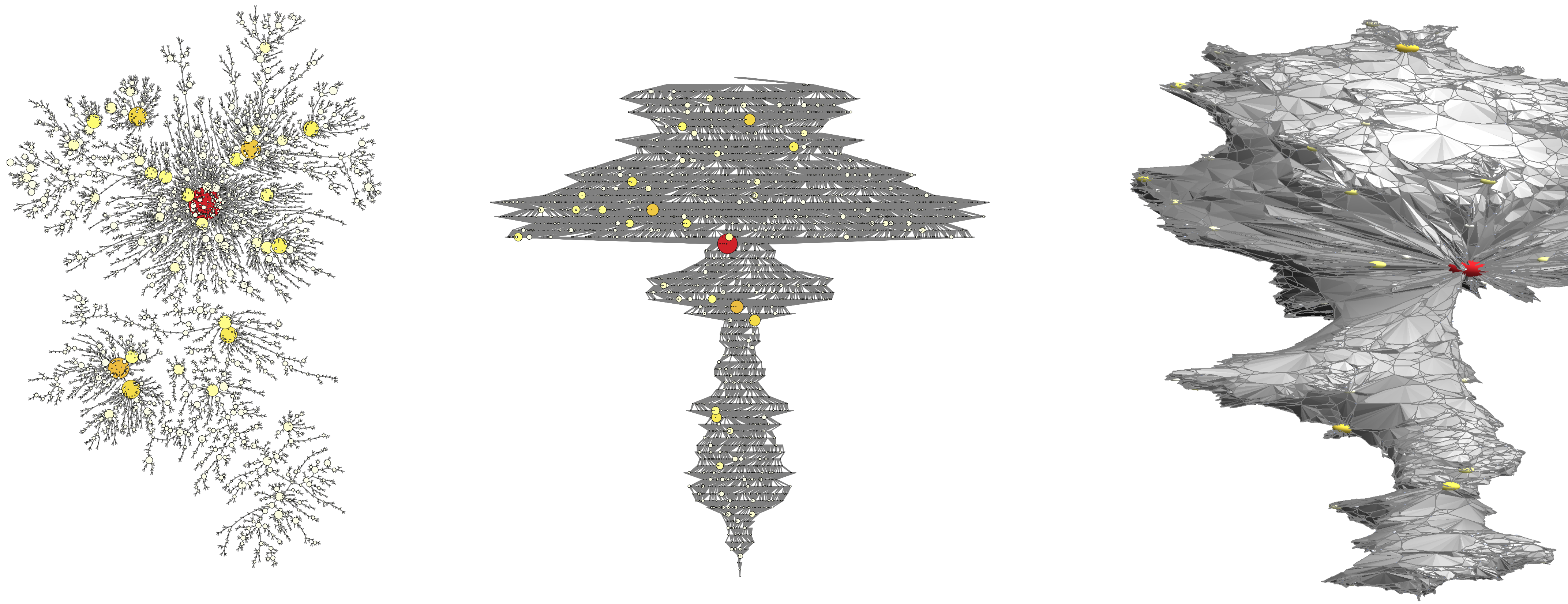


Figure – Un grand arbre (tronqué), la représentation en hauteur et la géométrie causale associée

Encore des dessins (3)

On descend encore : $a = 1.6$

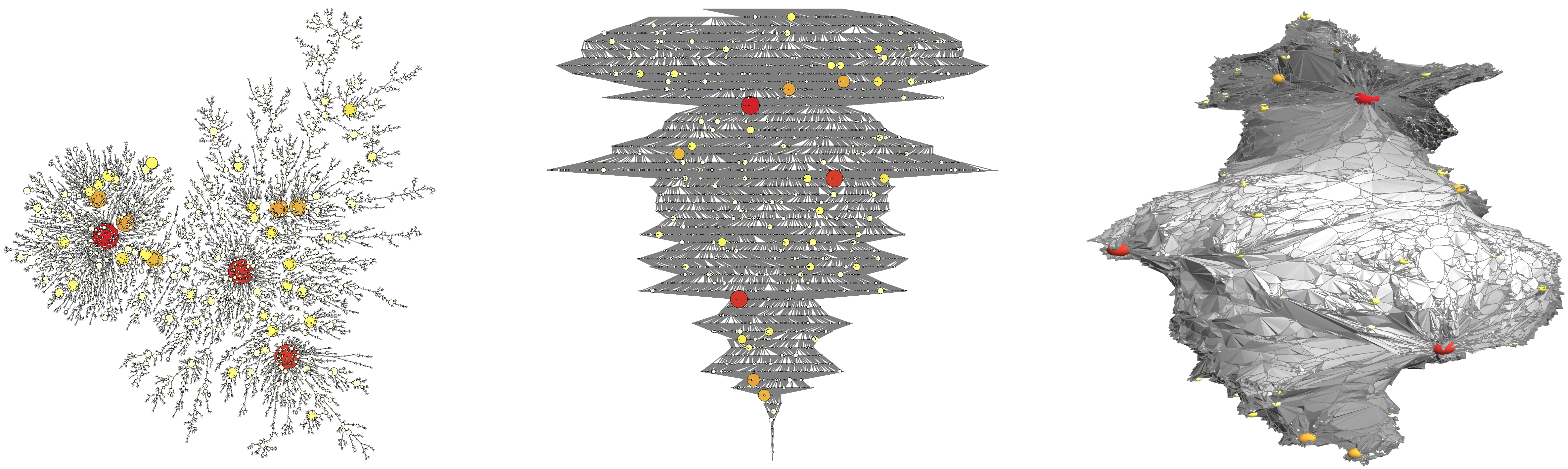
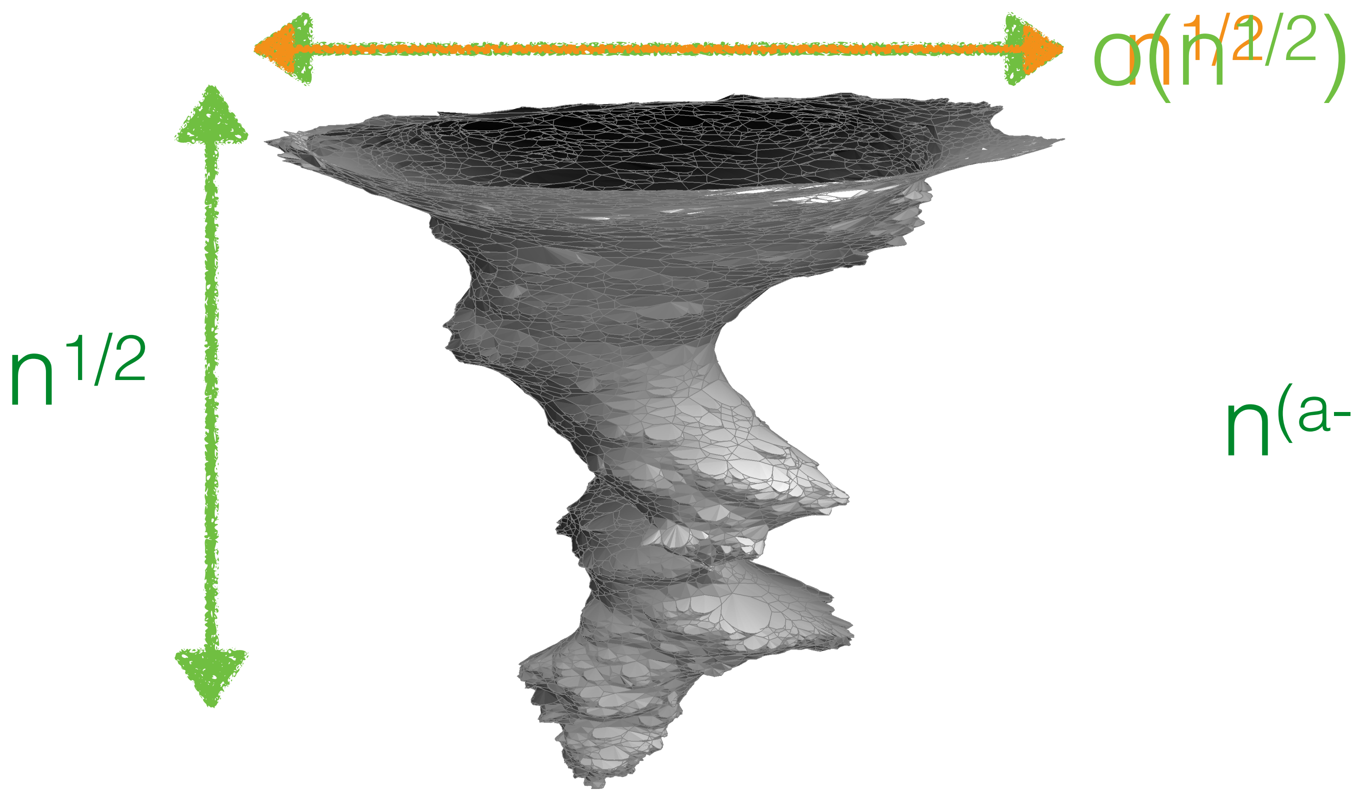


Figure – Un grand arbre (tronqué), la représentation en hauteur et la géométrie causale associée

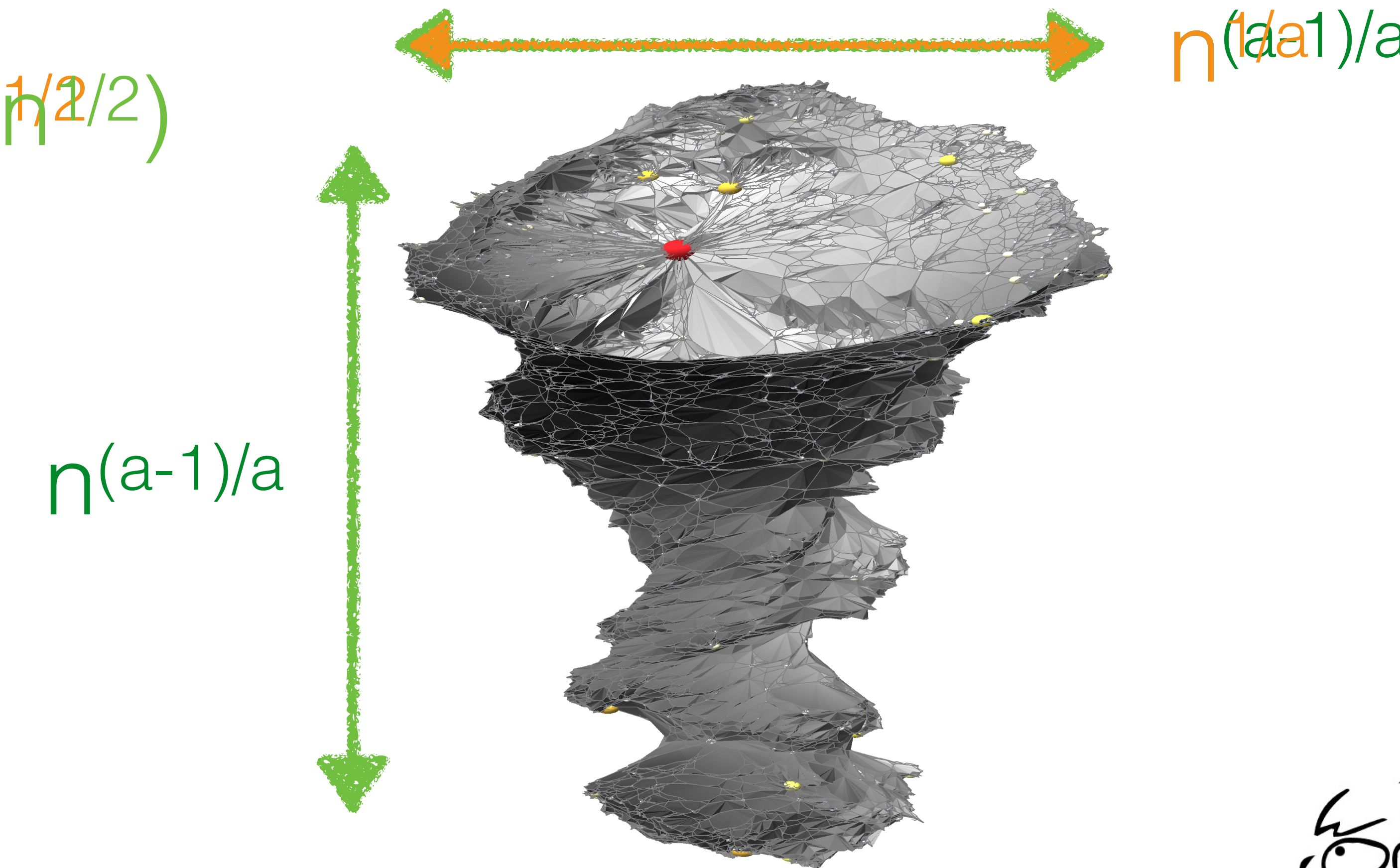
Limite d'échelle de cartes causales

Theorem (C., Hutchcroft, Nachmias)

$a \geqslant 2$



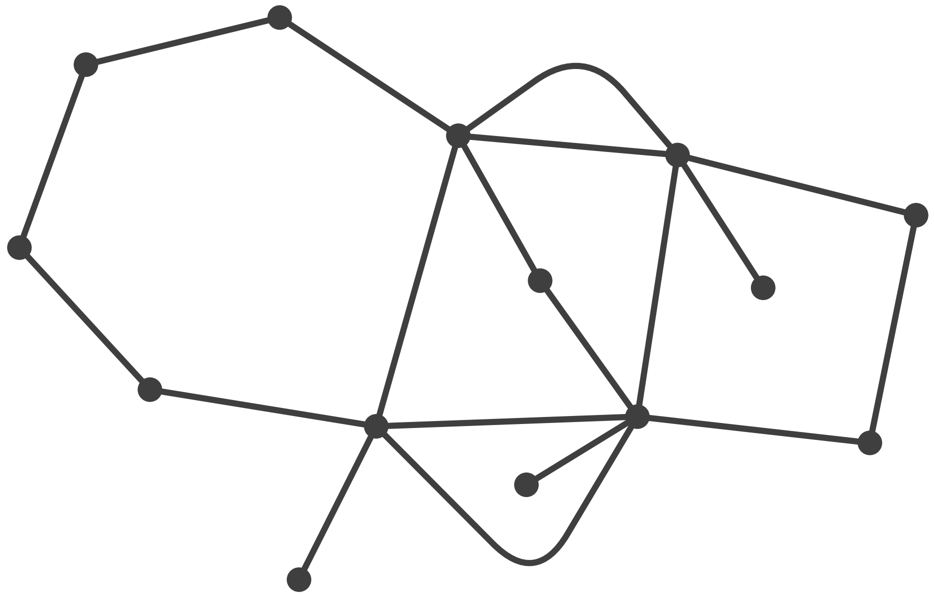
$a \in (1, 2)$



Cartes planaires aléatoires

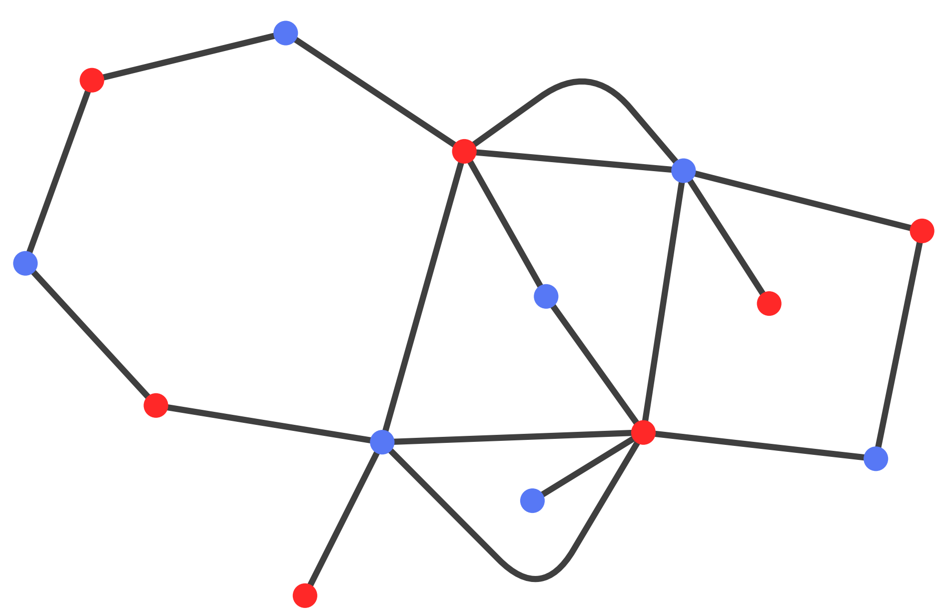
Boltzmann planar maps

Carte planaire = graphe planaire dessiné sur le plan.



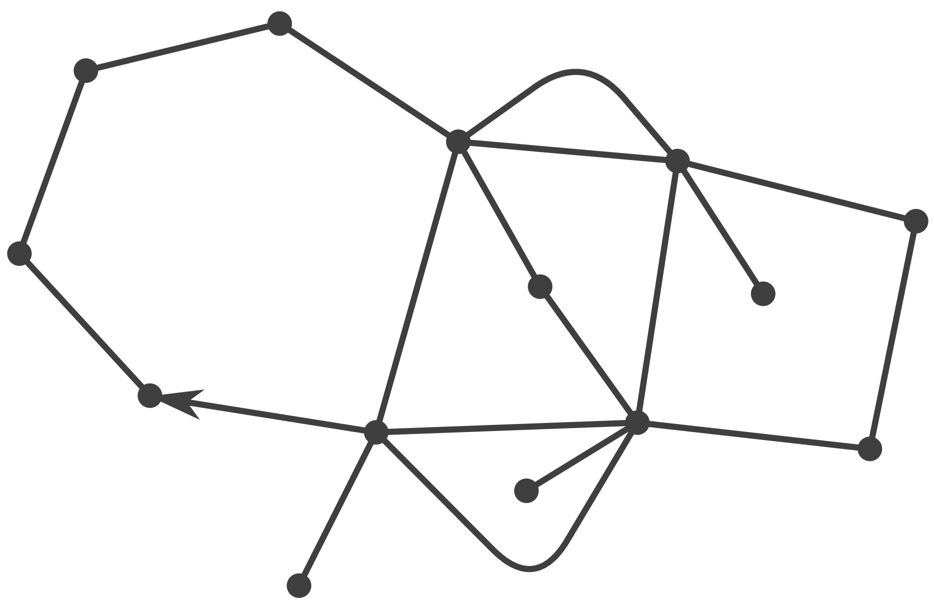
Boltzmann planar maps

Carte planaire = graphe planaire dessiné sur le plan. On se contente ici des cartes biparties (faces de degrés pairs) et enracinées.



Boltzmann planar maps

Carte planaire = graphe planaire dessiné sur le plan. On se contente ici des cartes biparties (faces de degrés pairs) et enracinées.



Boltzmann planar maps

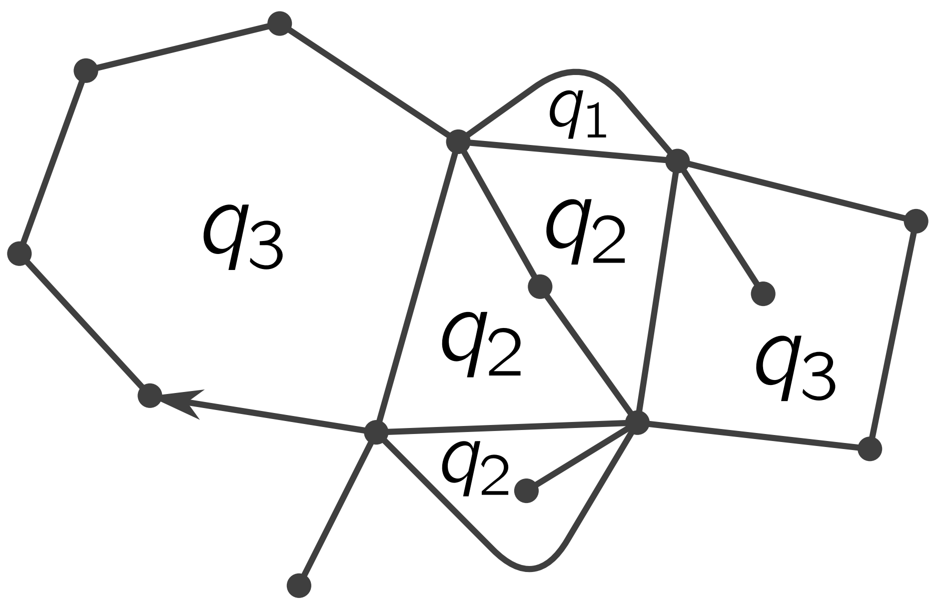
Carte planaire = graphe planaire dessiné sur le plan. On se contente ici des cartes biparties (faces de degrés pairs) et enracinées.

Si $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ est une suite de poids tels que

$$q_k \sim c \cdot k^{-a-\frac{1}{2}}, \quad a > 1$$

suivant Marckert & Miermont on crée une mesure sur l'ensemble des cartes (planaires biparties finies) en posant

$$w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathrm{f} \in \mathsf{Faces}(\mathfrak{m})} q_{\deg(f)/2}.$$



Boltzmann planar maps

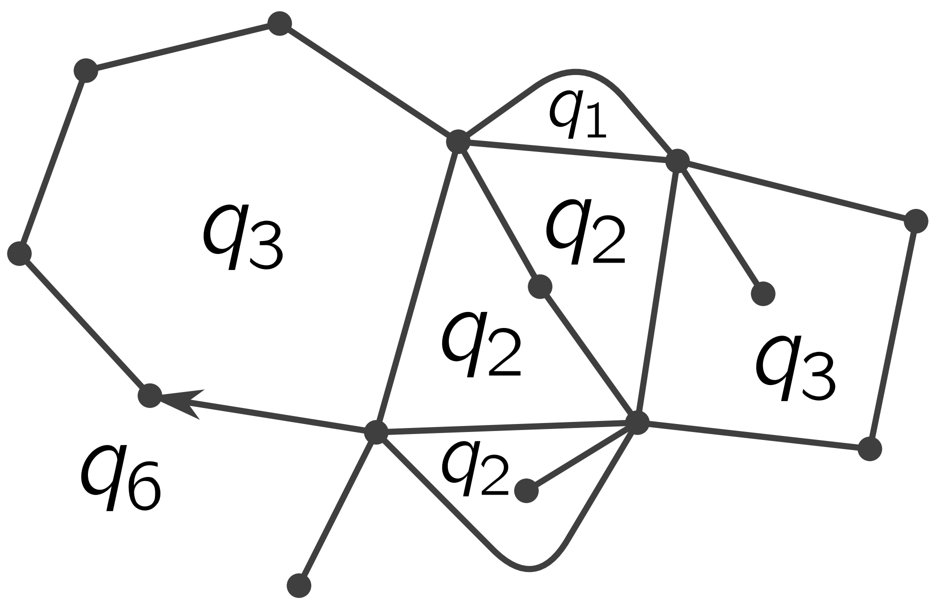
Carte planaire = graphe planaire dessiné sur le plan. On se contente ici des cartes biparties (faces de degrés pairs) et enracinées.

Si $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$ est une suite de poids tels que

$$q_k \sim c \cdot k^{-a-\frac{1}{2}}, \quad a > 1$$

suivant Marckert & Miermont on crée une mesure sur l'ensemble des cartes (planaires biparties finies) en posant

$$w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}) = \prod_{f \in \mathrm{Faces}(\mathfrak{m})} q_{\deg(f)/2}.$$



Boltzmann planar maps

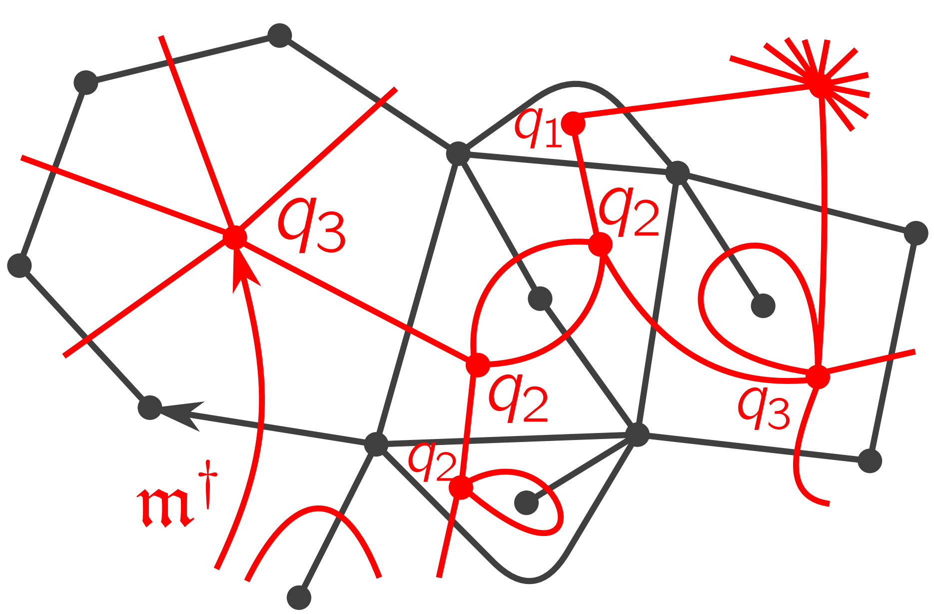
Carte planaire = graphe planaire dessiné sur le plan. On se contente ici des cartes biparties (faces de degrés pairs) et enracinées.

Si $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ est une suite de poids tels que

$$q_k \sim c \cdot k^{-a-\frac{1}{2}}, \quad a > 1$$

suivant Marckert & Miermont on crée une mesure sur l'ensemble des cartes (planaires biparties finies) en posant

$$w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathrm{f} \in \mathrm{Faces}(\mathfrak{m})} q_{\deg(f)/2}.$$



Criticalité

Rappel : Criticalité

- Cas des marches : θ est p.s. fini et $\mathbb{E}[\theta] = \infty$.
- Cas des arbres : T est p.s. fini et $\mathbb{E}[T] = \infty$.

Criticalité

Rappel : Criticalité

- Cas des marches : θ est p.s. fini et $\mathbb{E}[\theta] = \infty$.
- Cas des arbres : T est p.s. fini et $\mathbb{E}[T] = \infty$.

On suppose que $\mathbf{q}$ est admissible : $w_{\mathbf{q}}(\text{Cartes finies}) < \infty$ (on normalise pour avoir une mesure de proba).

Criticalité

Rappel : Criticalité

- Cas des marches : θ est p.s. fini et $\mathbb{E}[\theta] = \infty$.
- Cas des arbres : T est p.s. fini et $\mathbb{E}[T] = \infty$.

On suppose que $\mathbf{q}$ est admissible : $w_{\mathbf{q}}(\text{Cartes finies}) < \infty$ (on normalise pour avoir une mesure de proba).
On suppose aussi que $\mathbf{q}$ est critique (Bernardi, C., Miermont) :

$$\int \mathrm{d}w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m}) |\mathfrak{m}|^2 = \infty.$$

Criticalité

Rappel : Criticalité

- Cas des marches : θ est p.s. fini et $\mathbb{E}[\theta] = \infty$.
- Cas des arbres : T est p.s. fini et $\mathbb{E}[T] = \infty$.

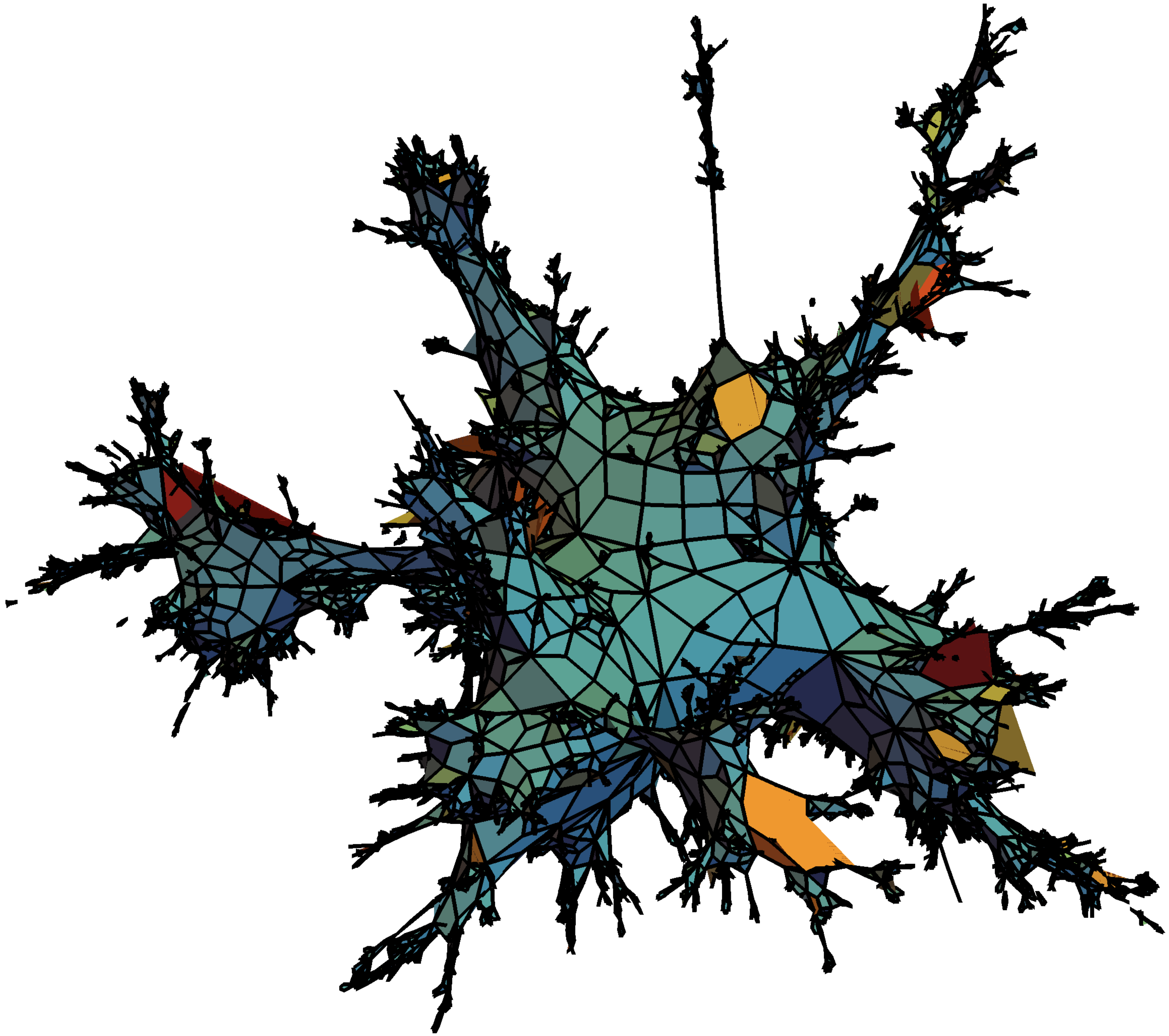
On suppose que $\mathbf{q}$ est admissible : $w_{\mathbf{q}}(\text{Cartes finies}) < \infty$ (on normalise pour avoir une mesure de proba).
On suppose aussi que $\mathbf{q}$ est critique (Bernardi, C., Miermont) :

$$\int \mathrm{d}w_{\mathbf{q}}(\mathfrak{m})|\mathfrak{m}|^2 = \infty.$$

On peut alors considérer $\mathfrak{M}_n$ une carte distribuée selon $w_{\mathbf{q}}$ conditionnée à avoir taille n.

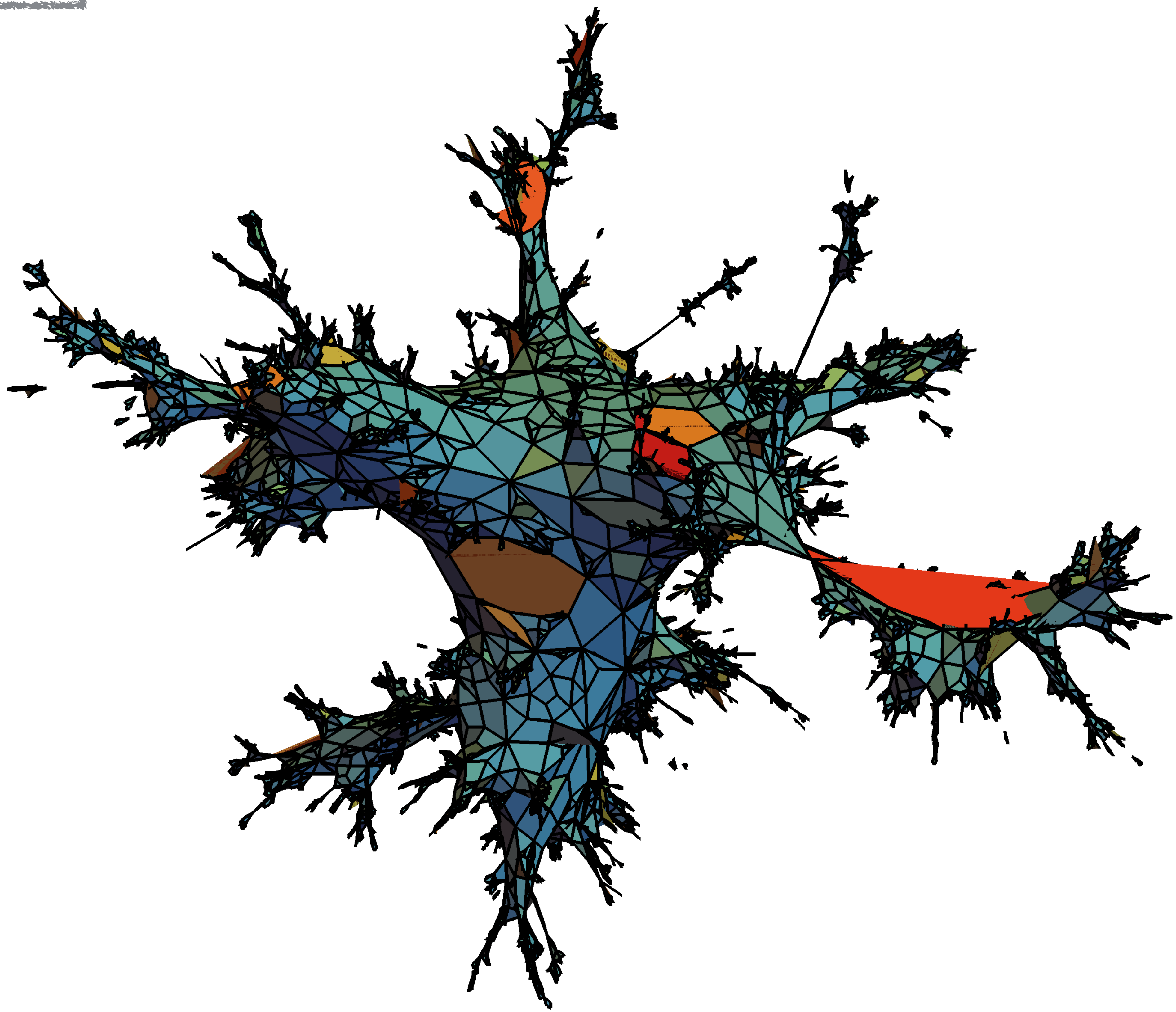
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.95



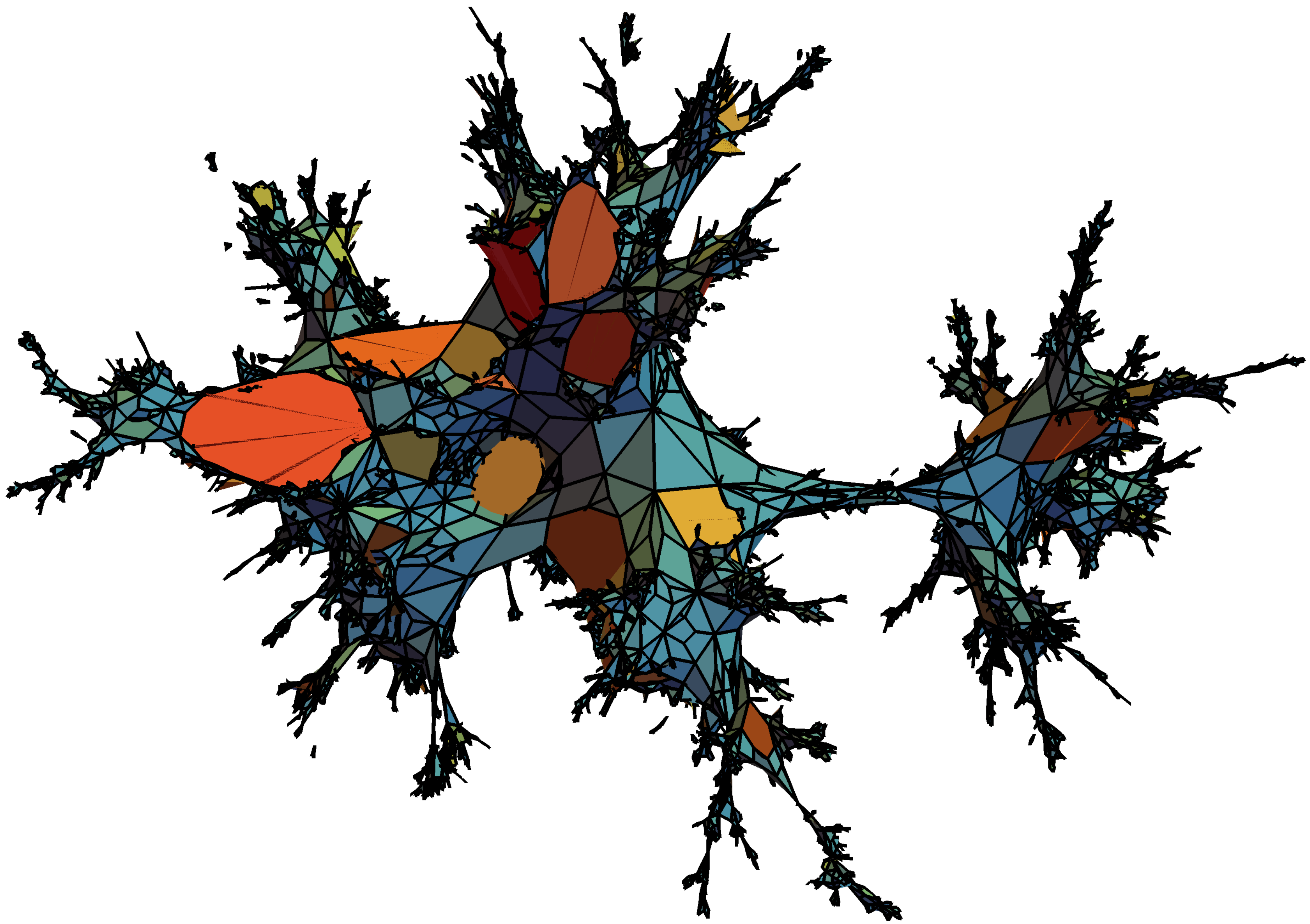
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.90



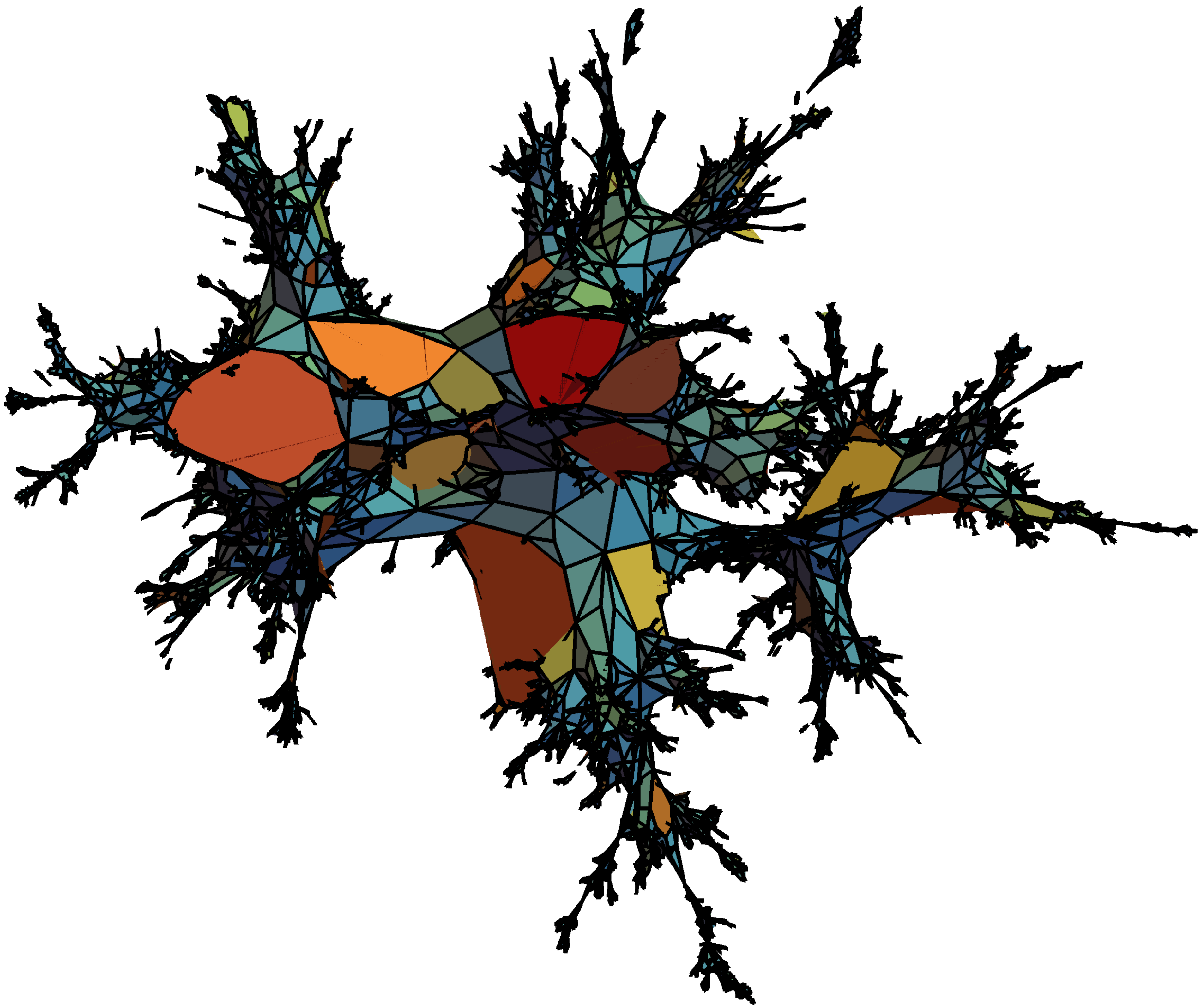
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.80



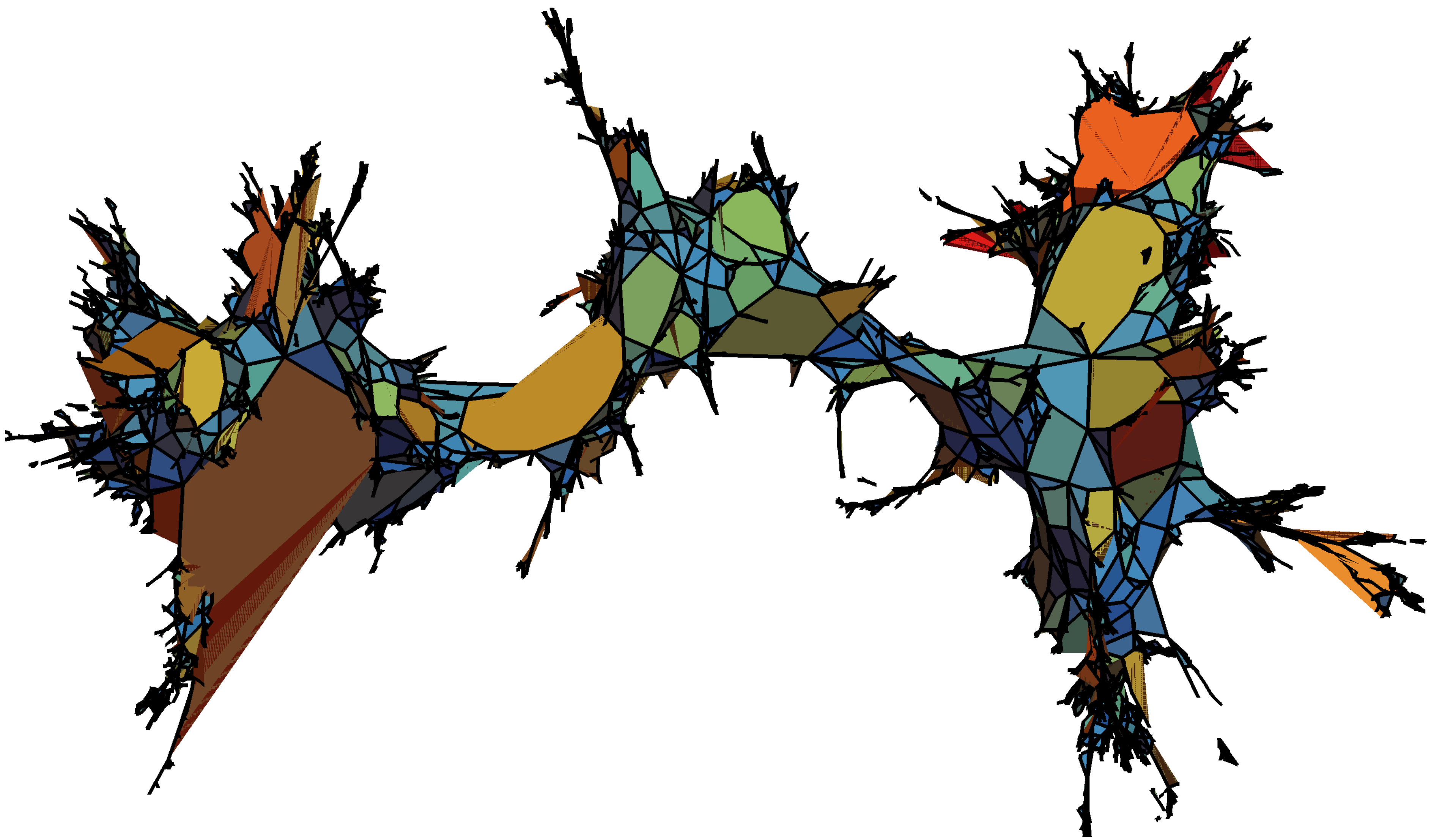
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.80



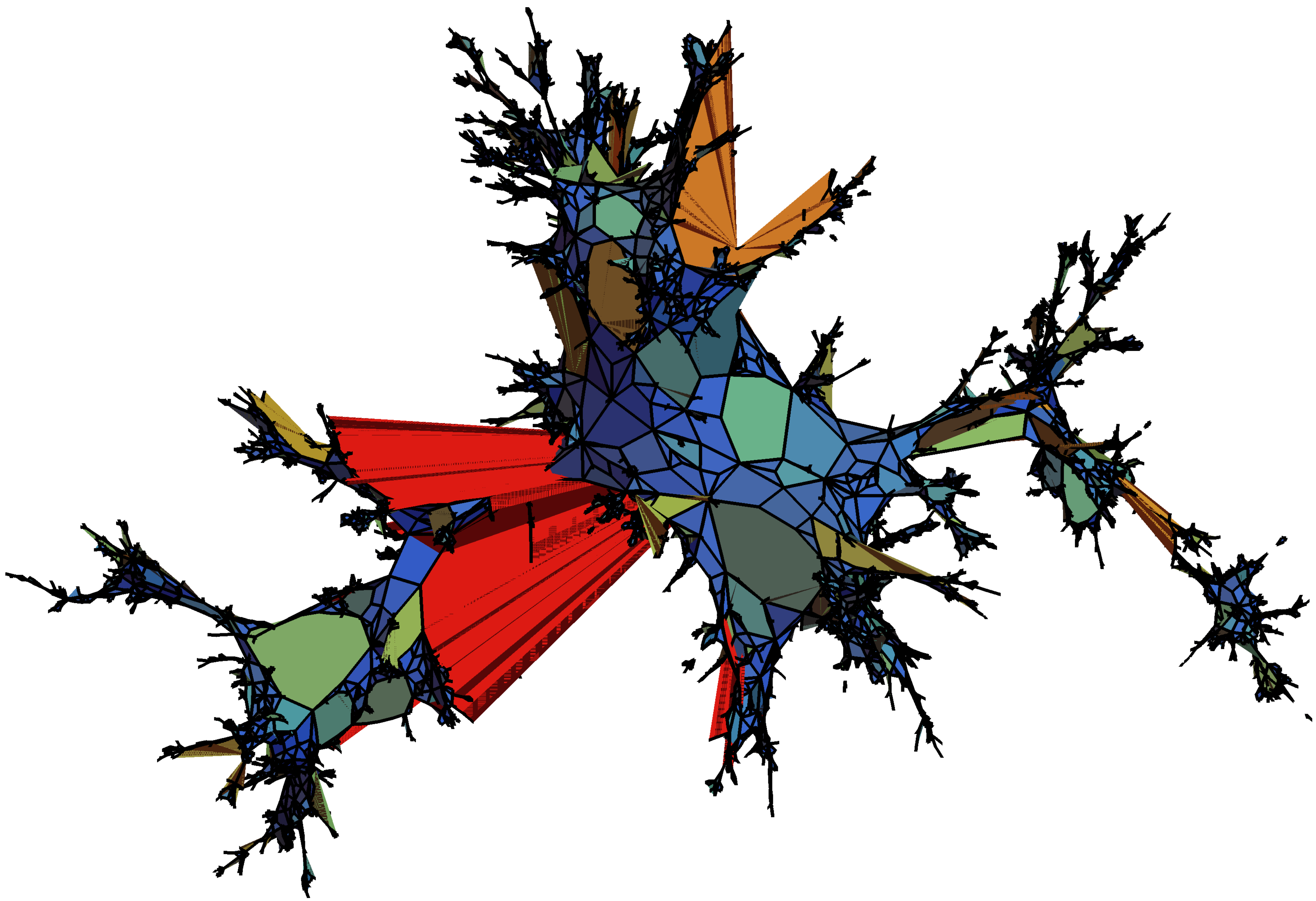
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.70



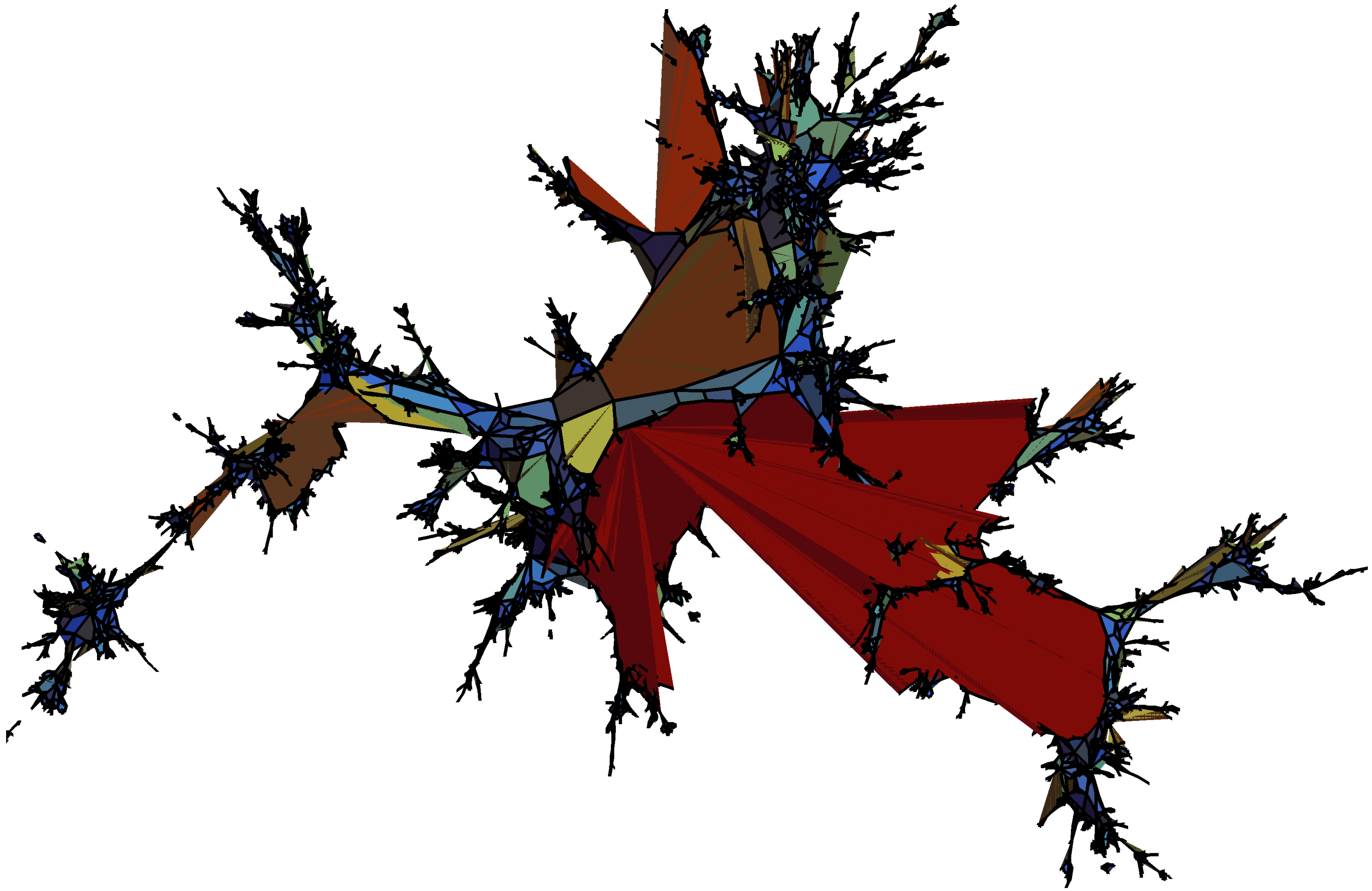
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.50



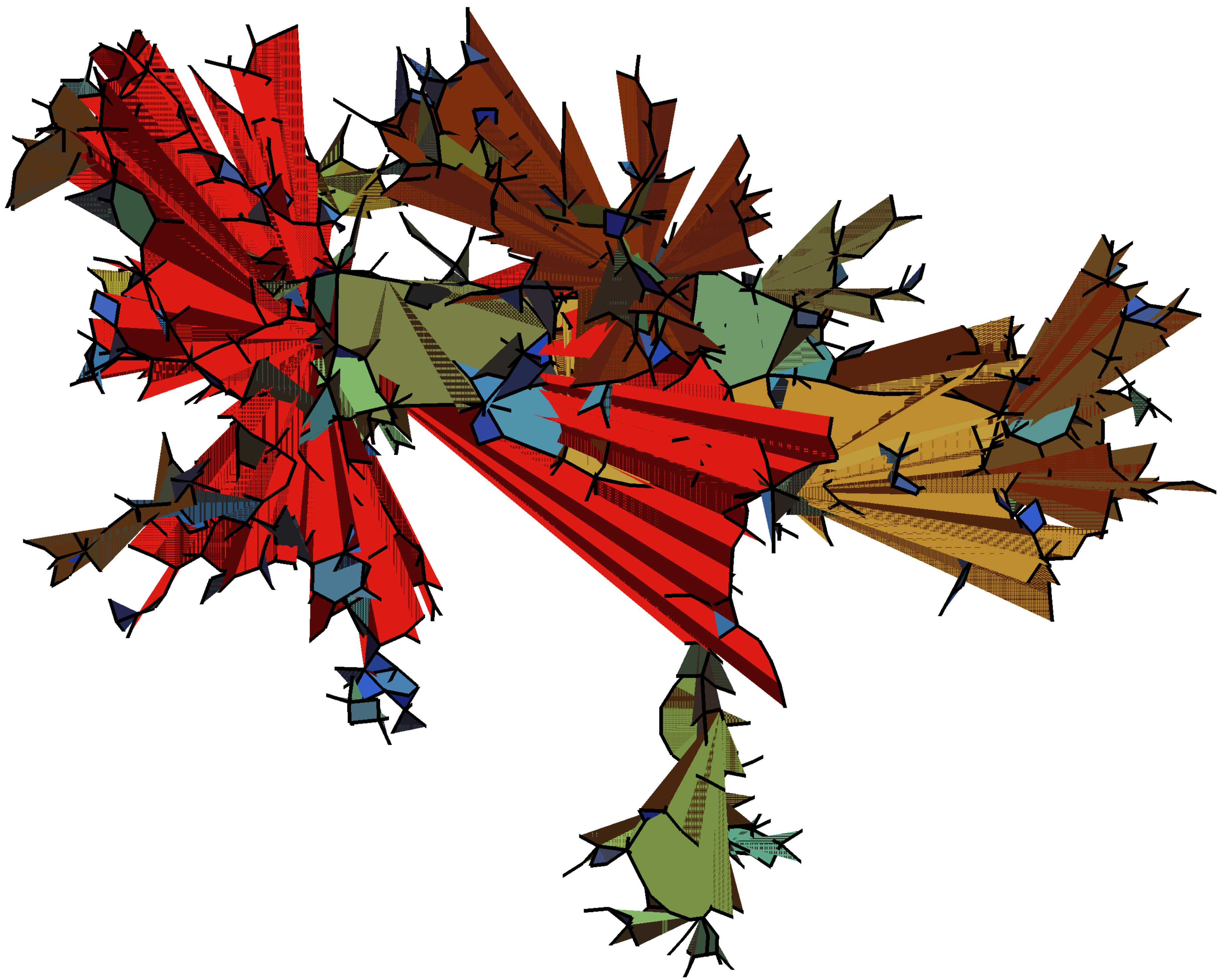
Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.40



Encore des dessins (4) : avec des grandes faces

a=1.40



Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.95

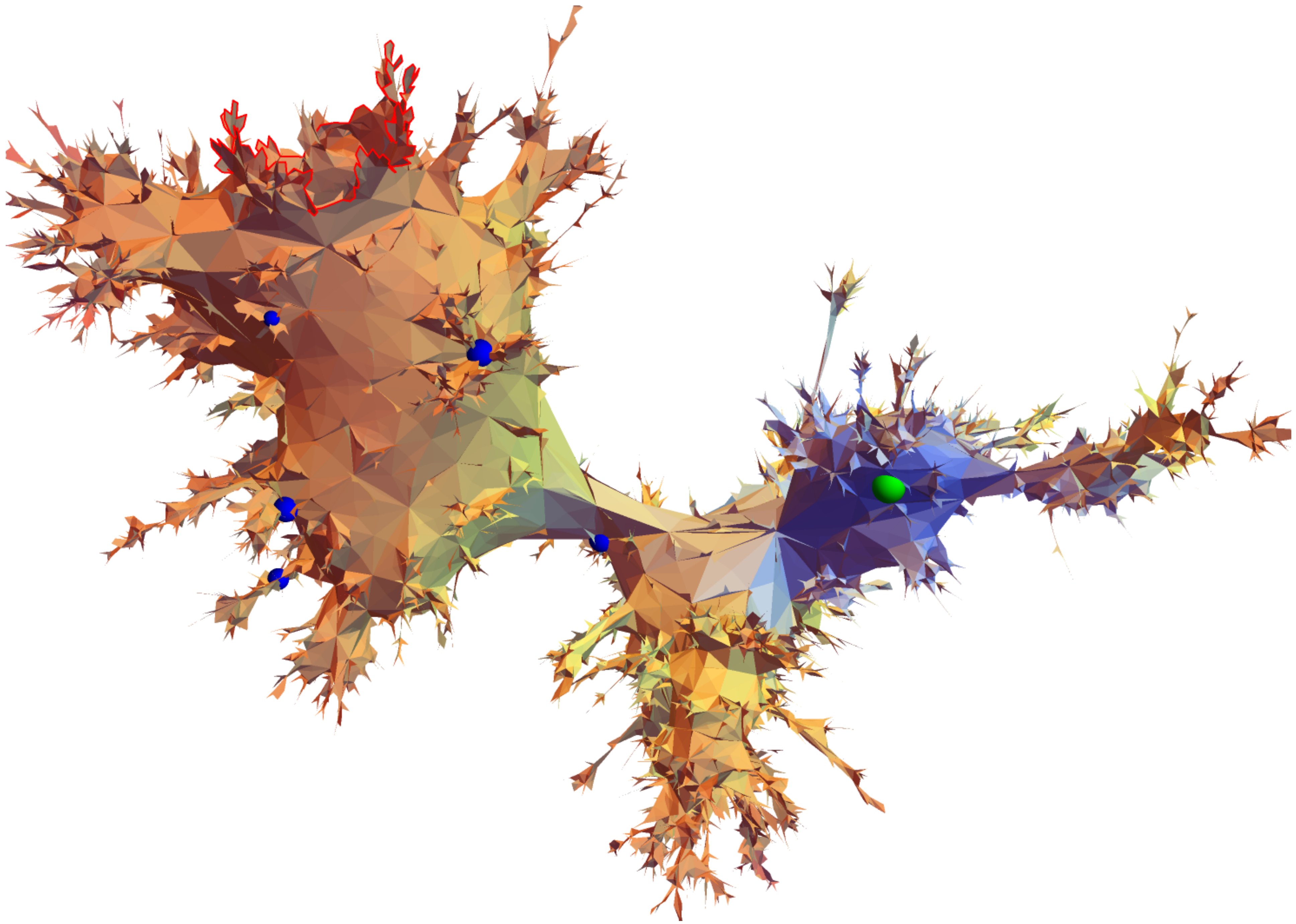


Figure – Courtesy of T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.85

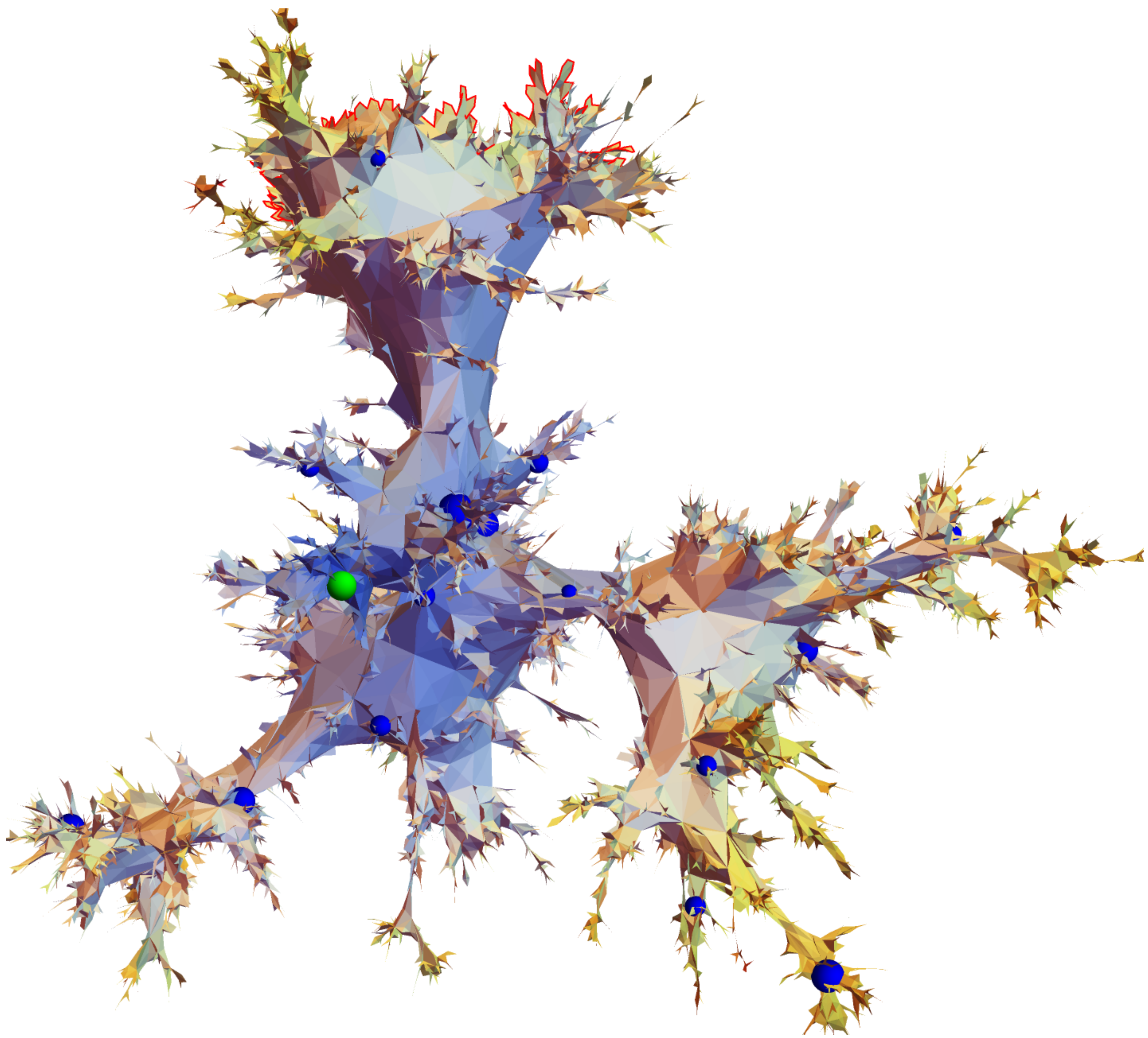


Figure – Simulations by T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

$a=1.80$

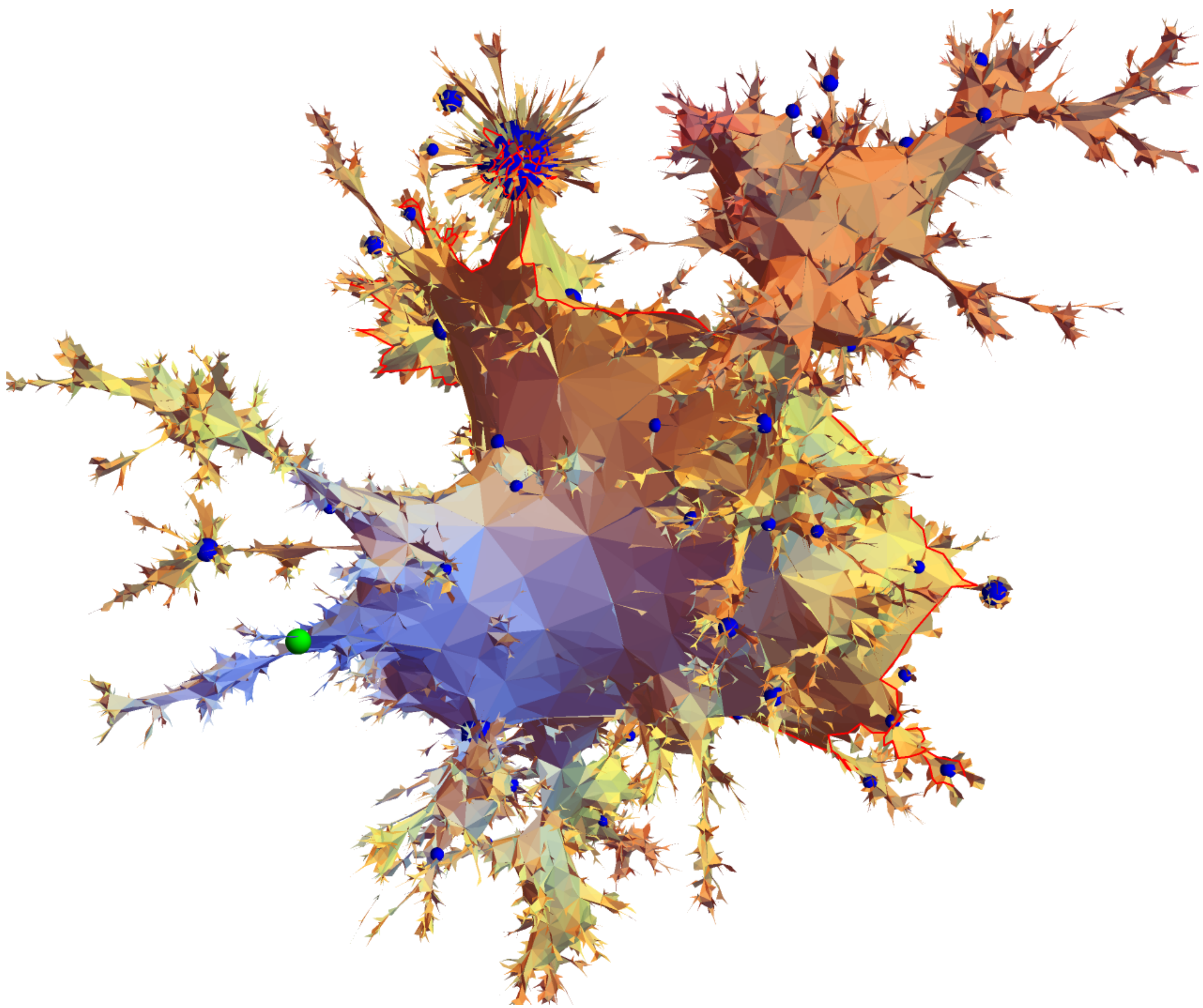


Figure – Simulations by T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.80

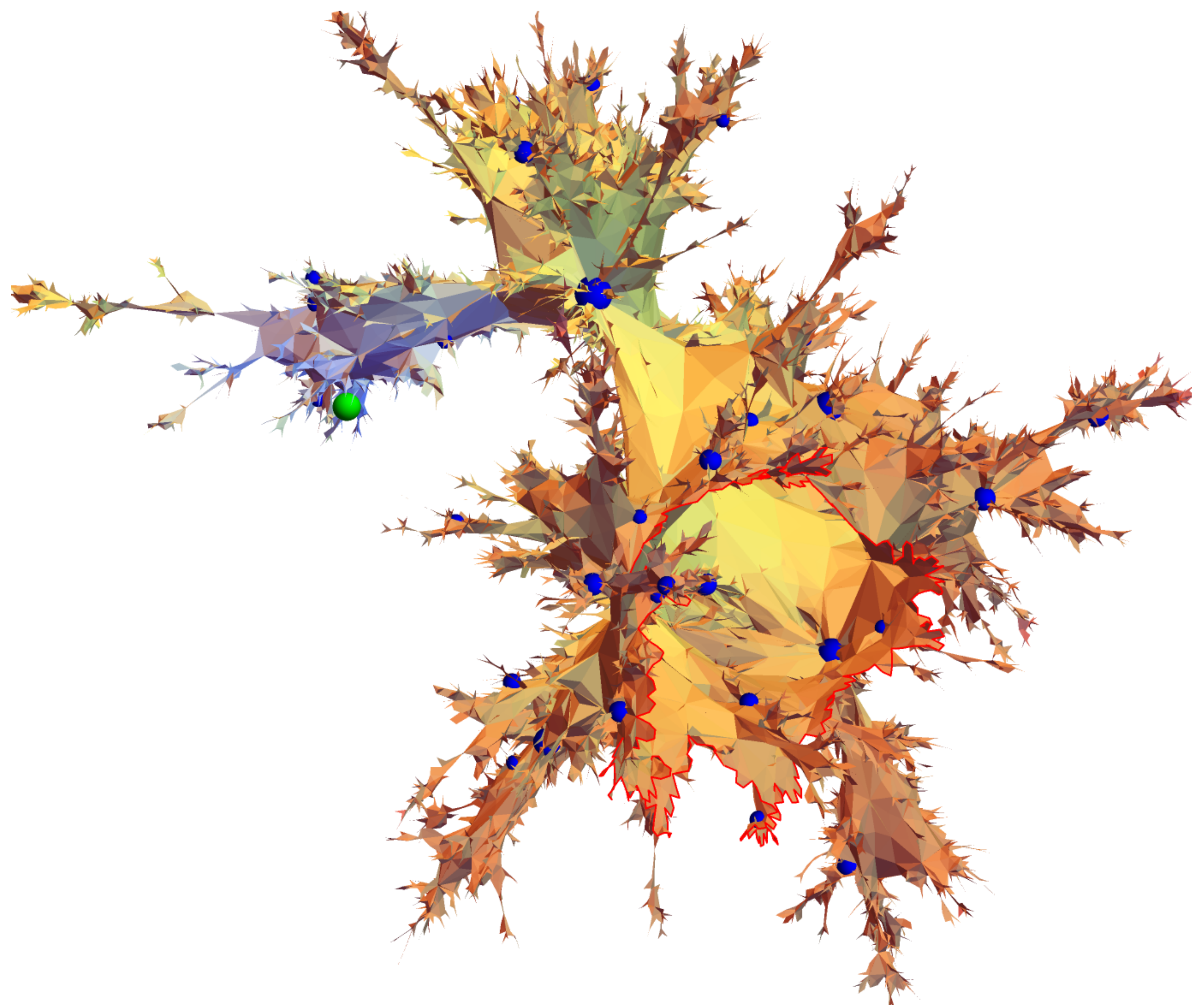


Figure – Simulations by T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.50

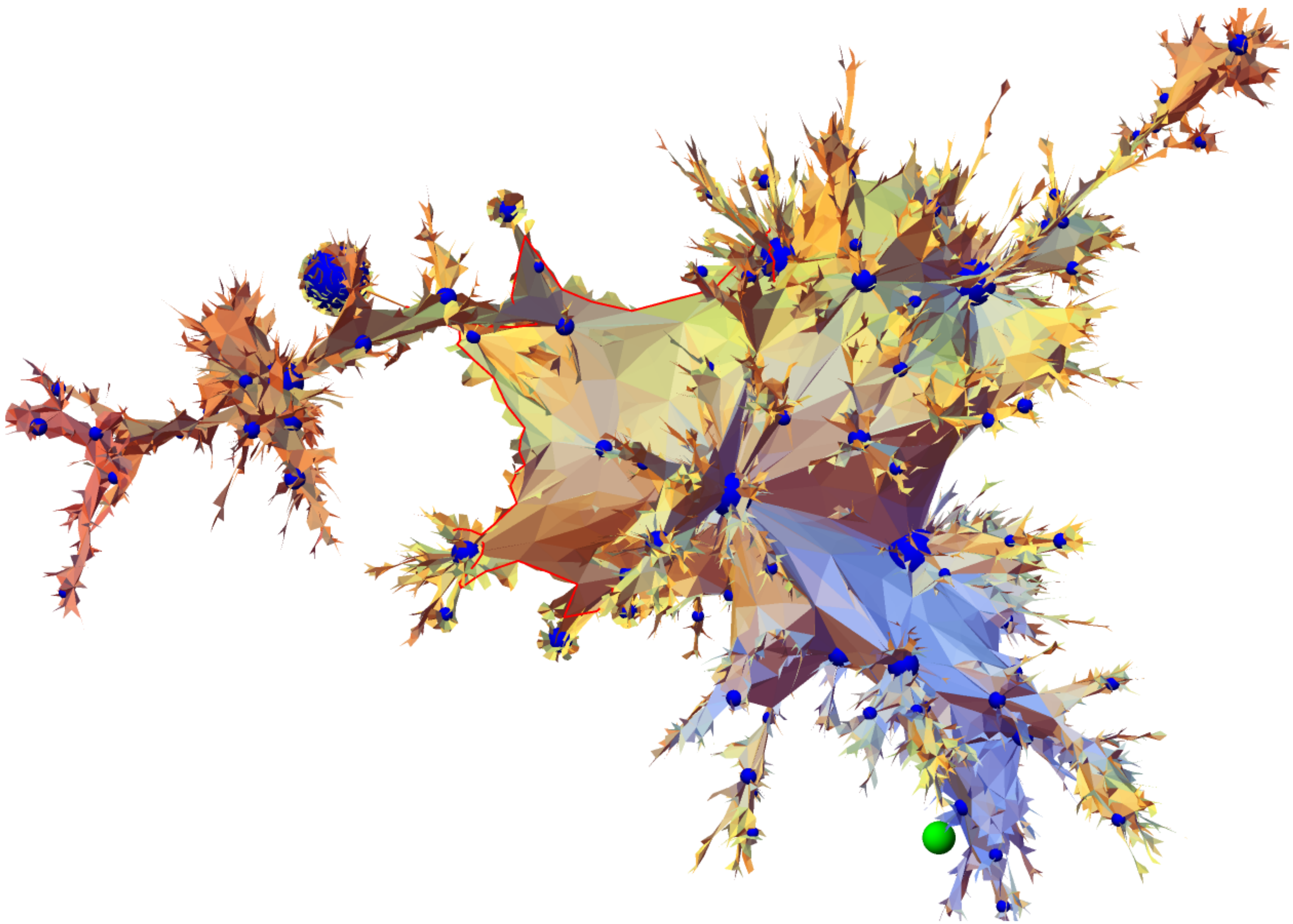


Figure – Simulations by T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.30

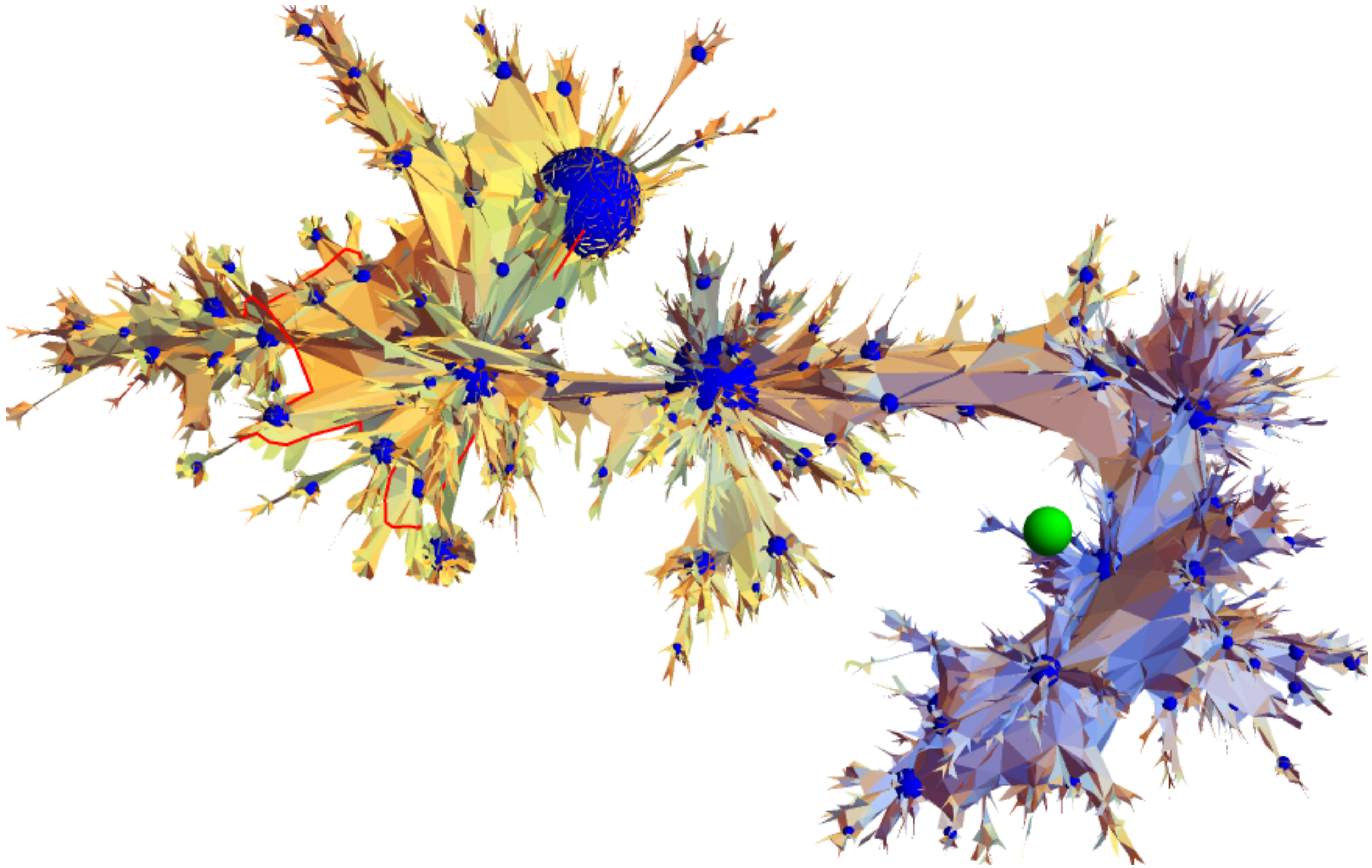


Figure – Simulations by T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.30

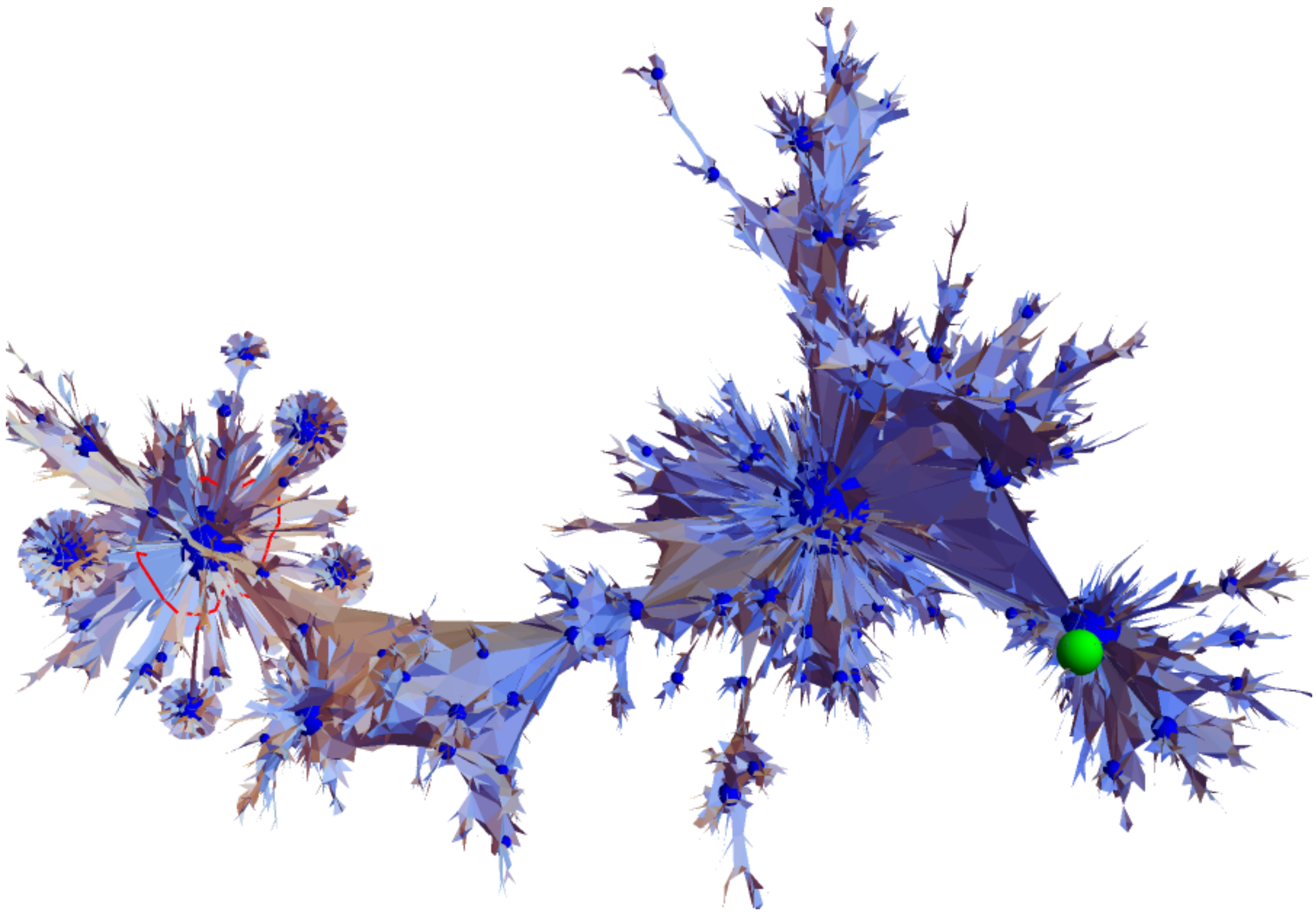


Figure – Simulations by T. Budd

Encore des dessins (5) : avec des grands degrés

a=1.20

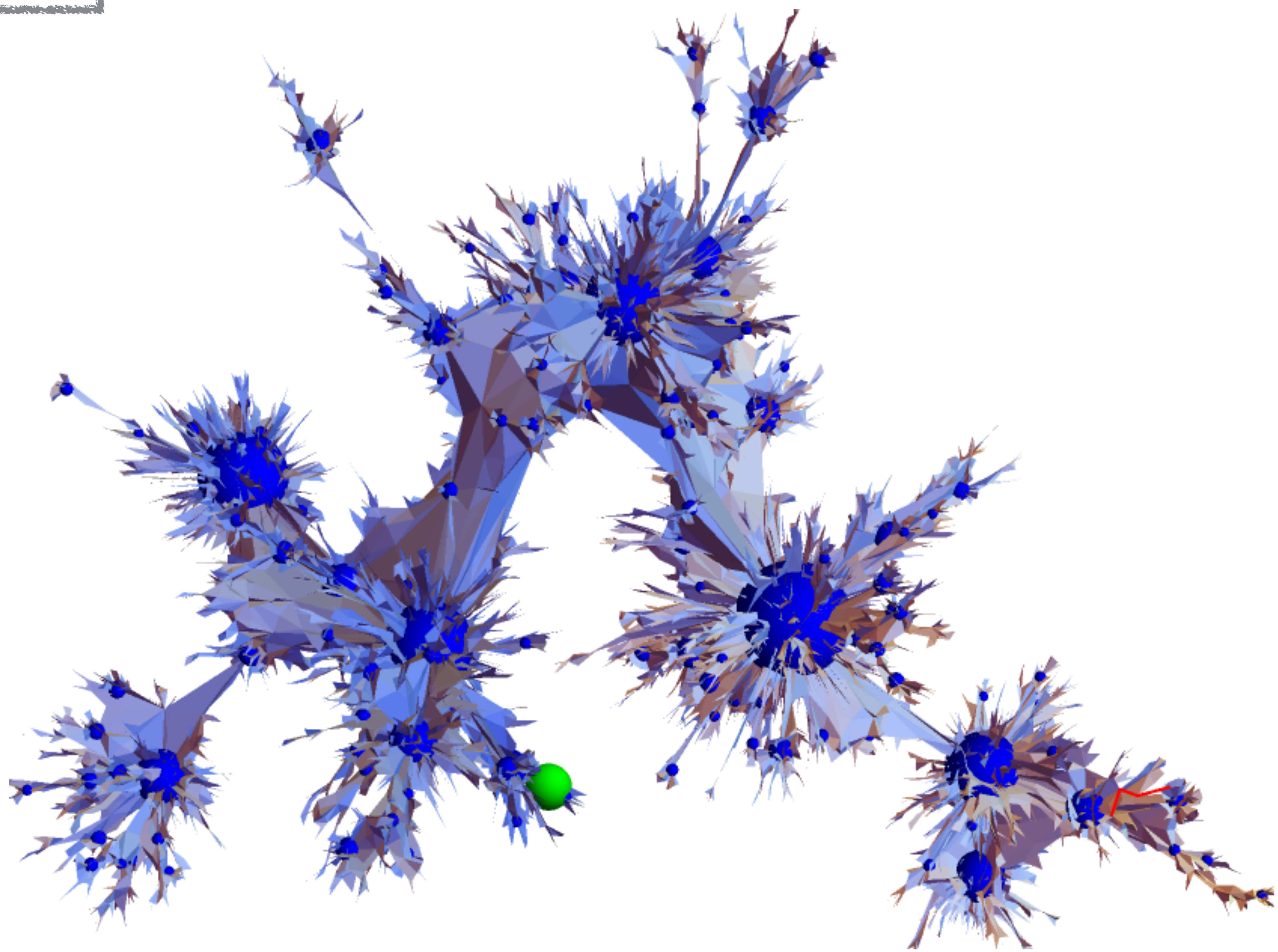
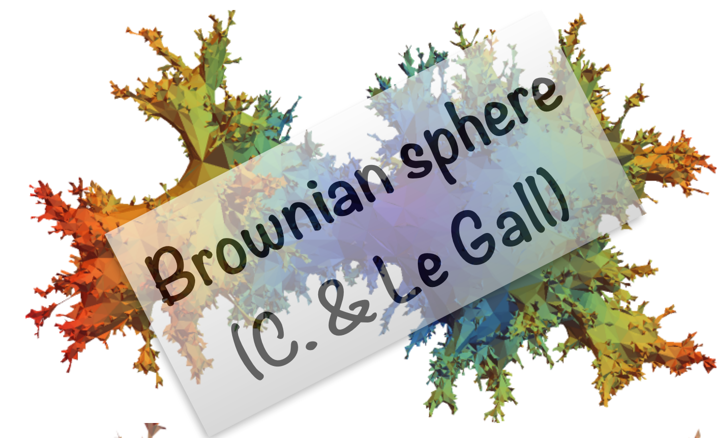


Figure – Simulations by T. Budd

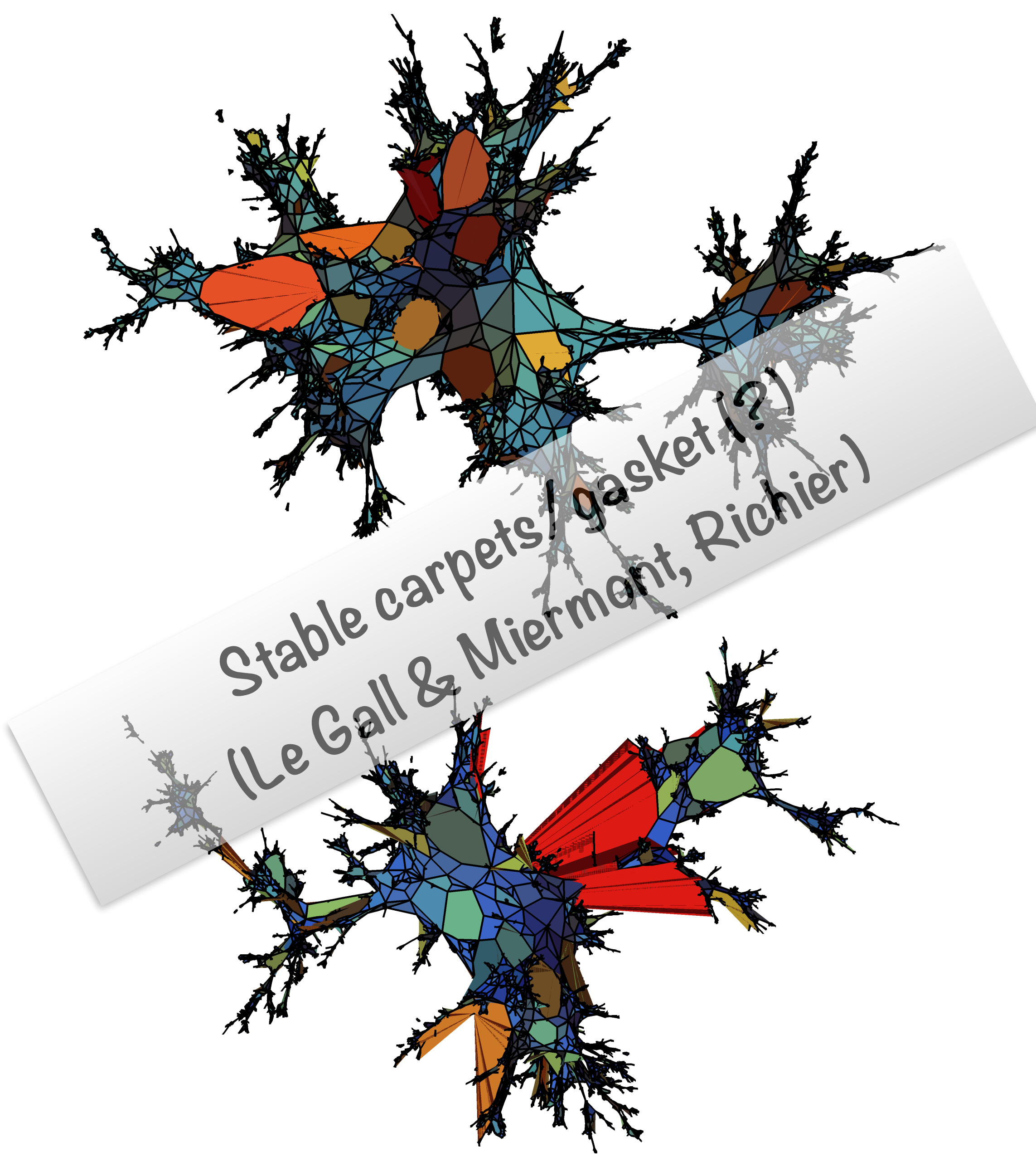
$\mathfrak{m}$ (large faces) | $\mathfrak{m}^{\dagger}$ (large degrees)

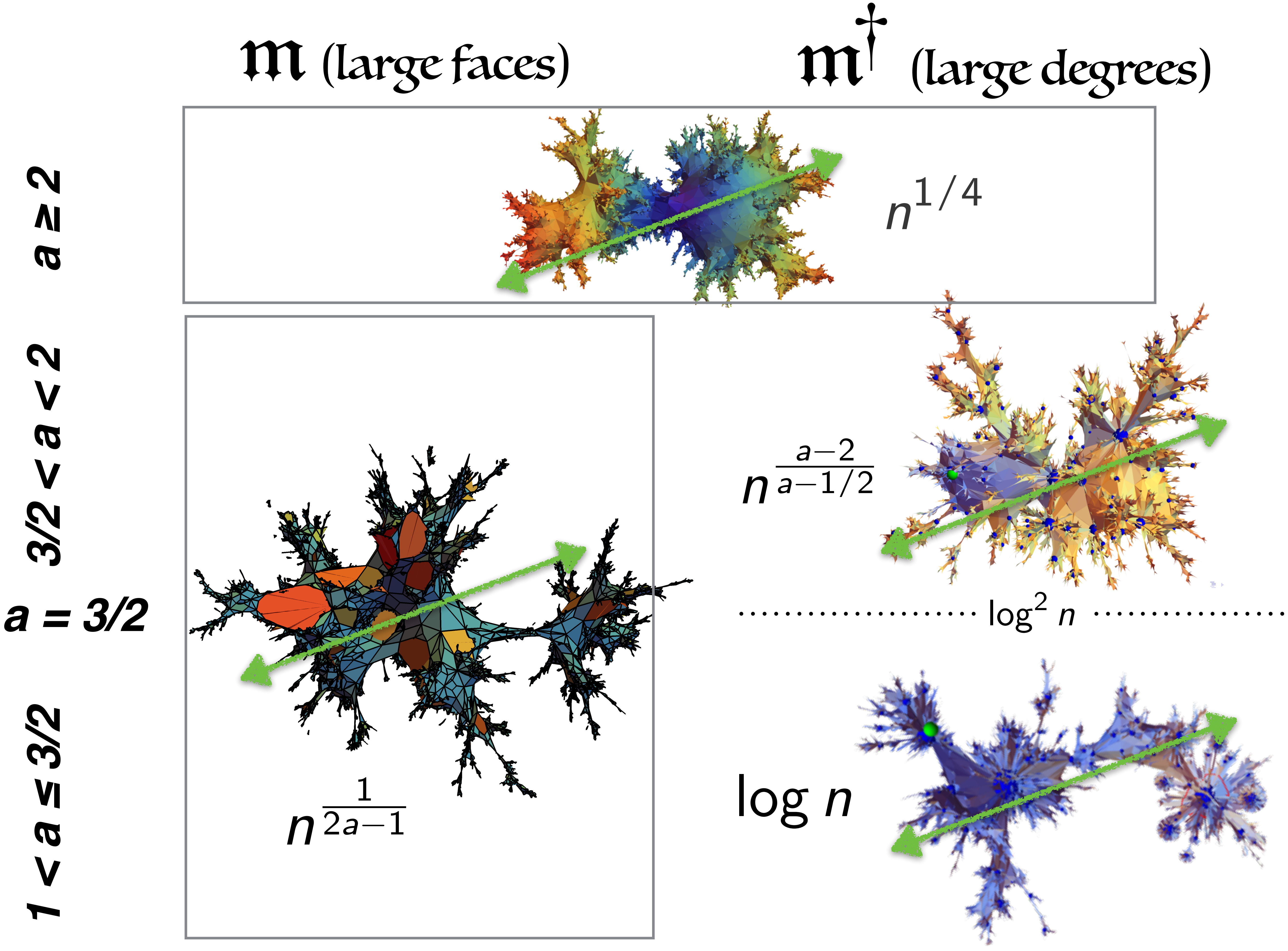
$a \geq 2$



$3/2 < a < 2$

$1 < a \leq 3/2$

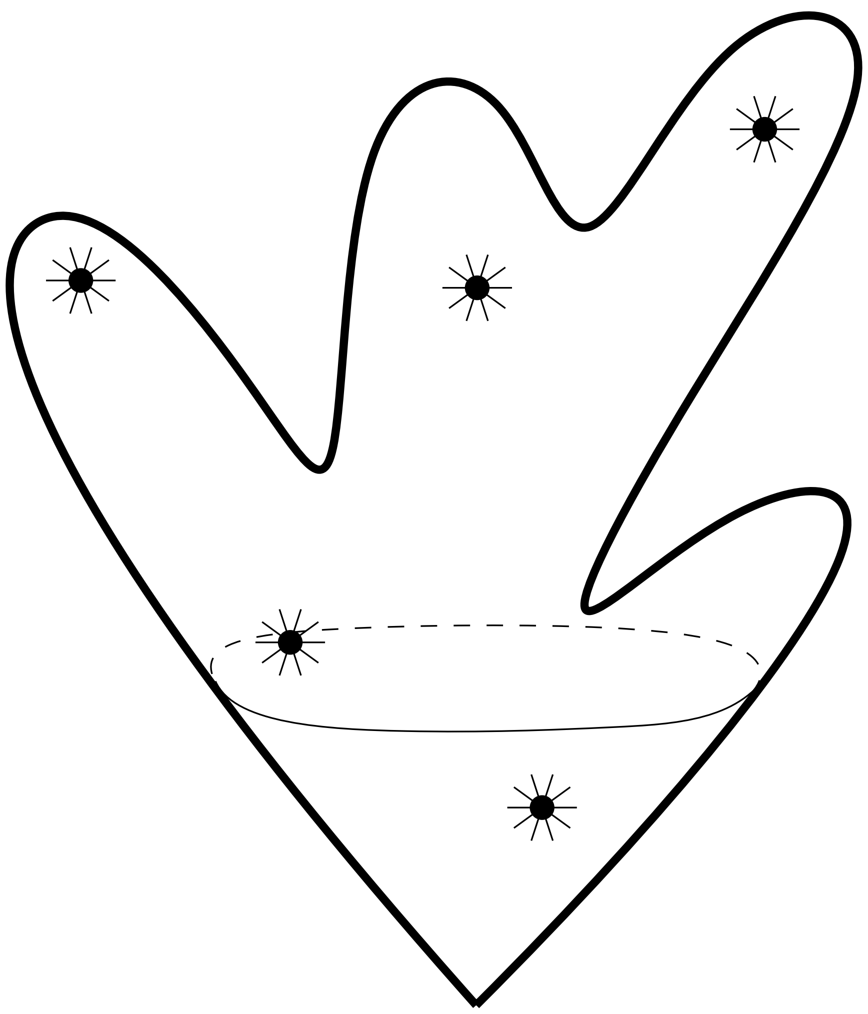




$\mathfrak{m}$ (large faces)
$\mathfrak{m}^{\dagger}$ (large degrees)
$a \geq 2$
$n^{1/4}$
$3/2 < a < 2$
$n^{\frac{a-2}{a-1/2}}$
$a = 3/2$
$\log^2 n$
$1 < a \leq 3/2$
$n^{\frac{1}{2a-1}}$
$\log n$

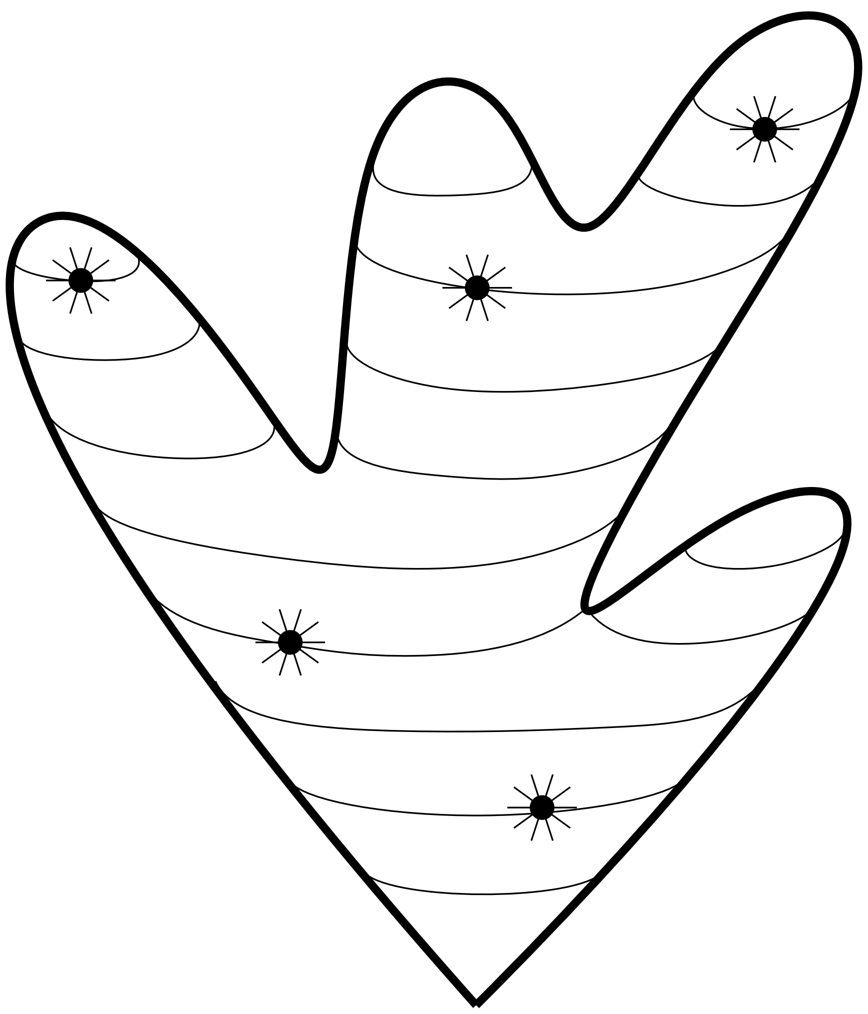
Comment construire une sphere stable ?

Si $\mathfrak{m}^\dagger$ est une carte avec des grands degrés on la saucissonne en tranches à hauteur :



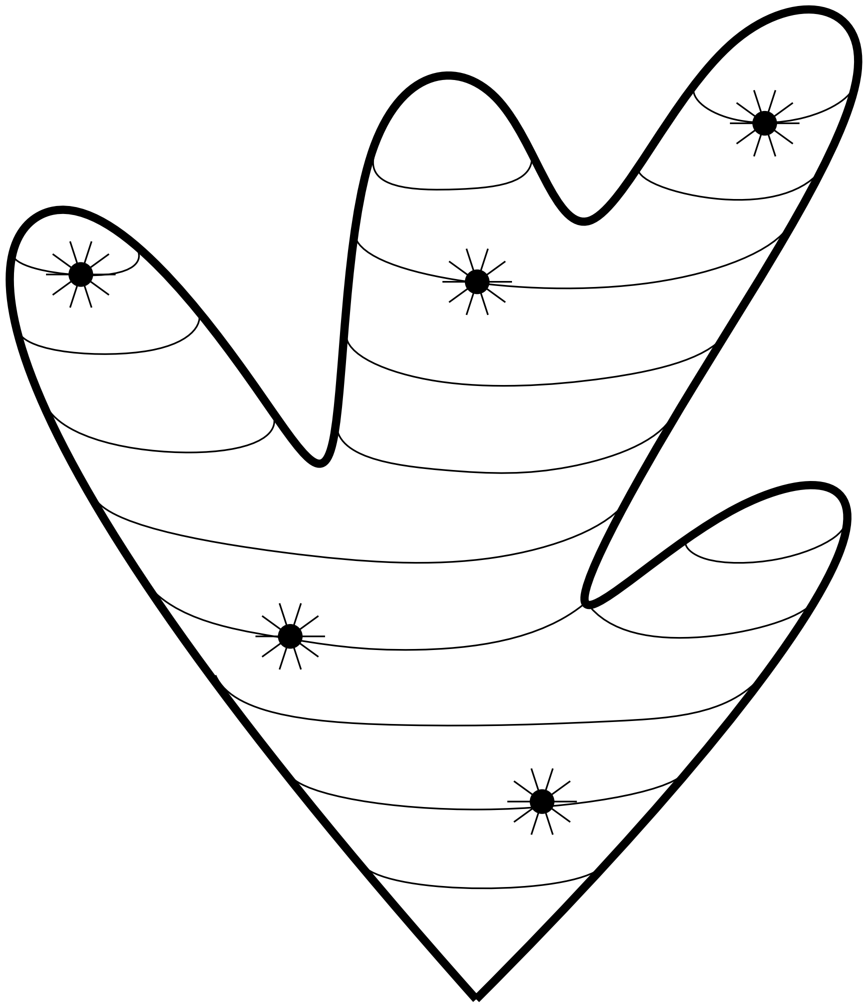
Comment construire une sphere stable ?

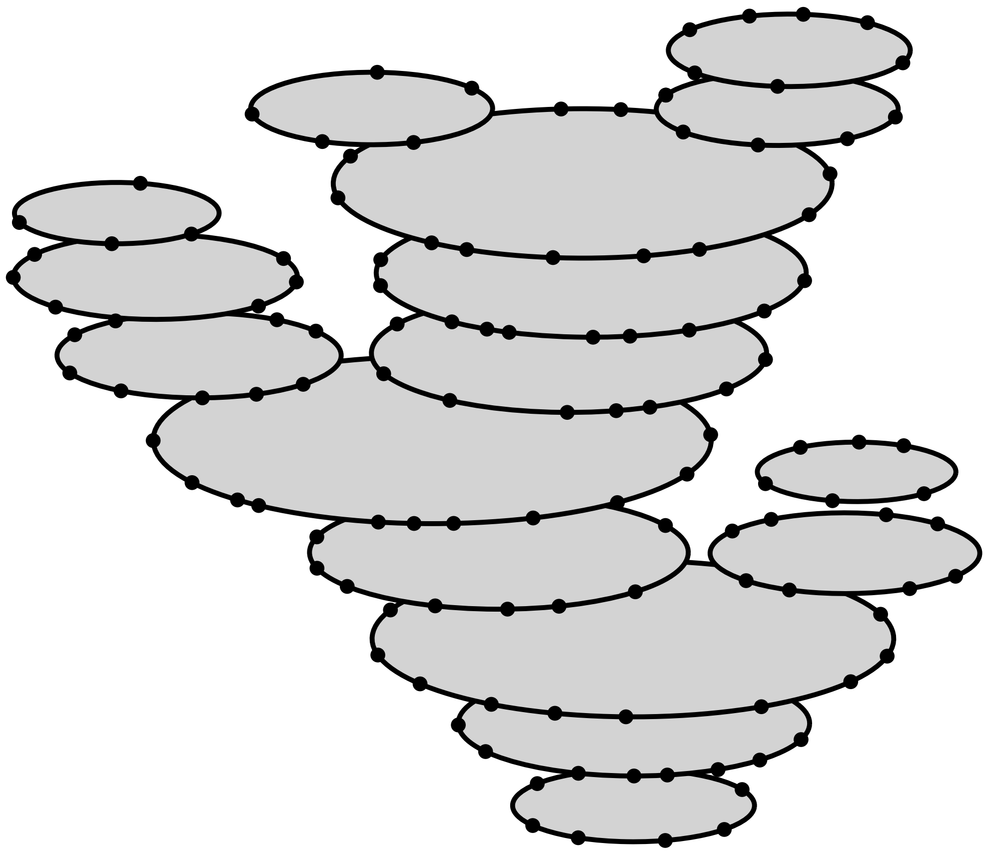
Si $\mathfrak{m}^\dagger$ est une carte avec des grands degrés on la saucissonne en tranches à hauteur :



Comment construire une sphere stable ?

Si $\mathfrak{m}^\dagger$ est une carte avec des grands degrés on la saucissonne en tranches à hauteur :





Comment construire une sphere stable ? (II)

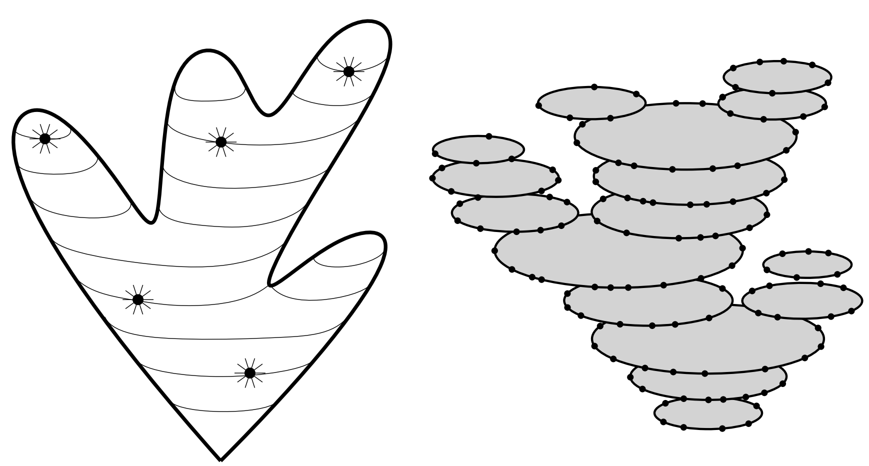
Si $\mathbf{L}(r)$ est la suite des périmètres des cycles à hauteur r alors on a

Theorem (Bertoin, Budd, C., Kortchemski, '16)

Avec nos hypothèses pour $a \in (2, \frac{5}{2})$ on a (en trichant un peu)

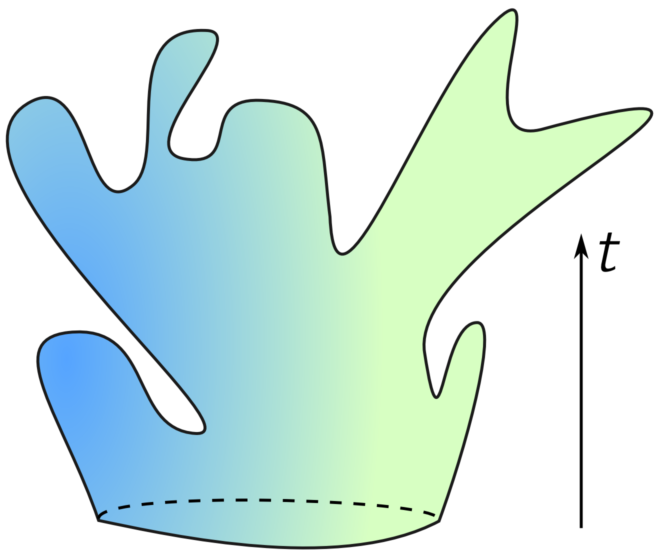
$$\left(\frac{\mathbf{L}(\lfloor \ell^{a-2} \cdot t \rfloor)}{\ell} \right)_{t \geqslant 0} \xrightarrow[l \to \infty]{(\mathrm{d})} \left(\mathbf{X}_t^{(a)} \right)_{t \geqslant 0},$$

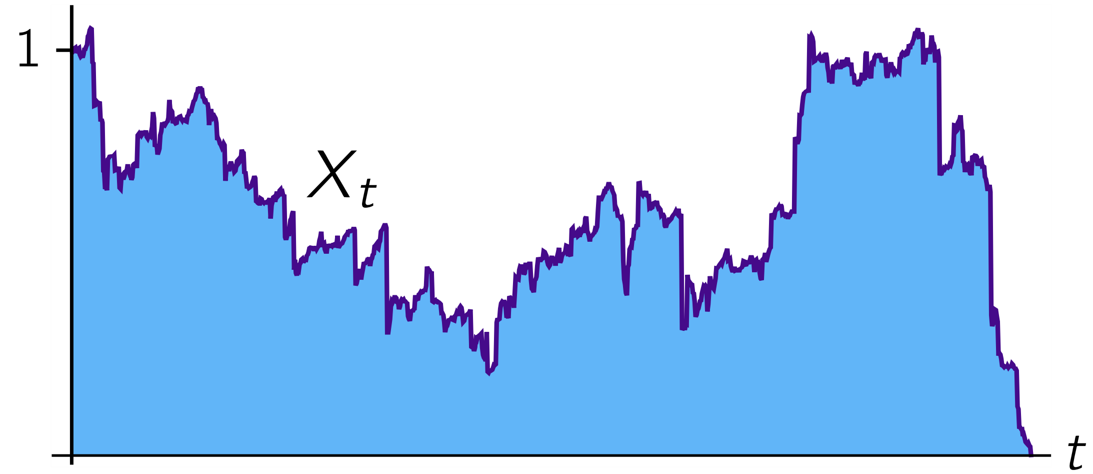
où $\mathbf{X}_t^{(a)}$ "est" un self-similar growth-fragmentation process (Bertoin).



Growth-fragmentation process

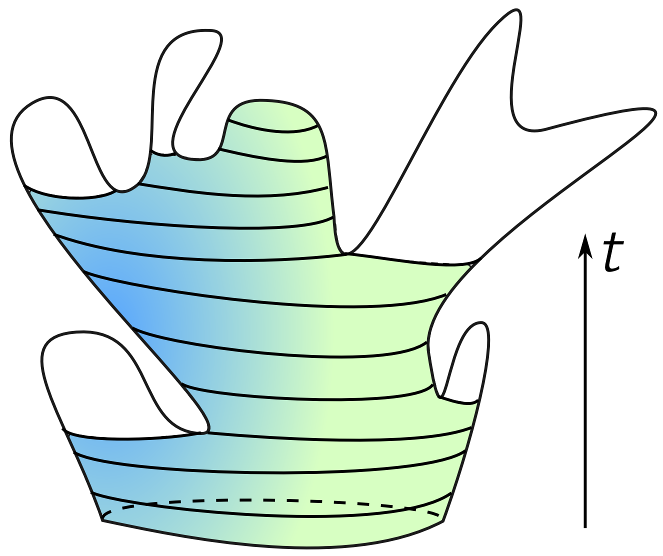
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.

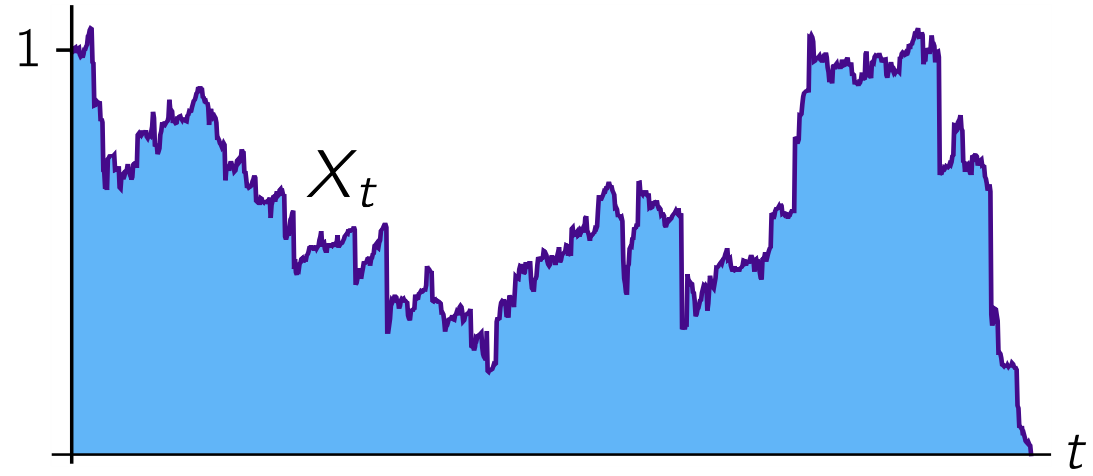




Growth-fragmentation process

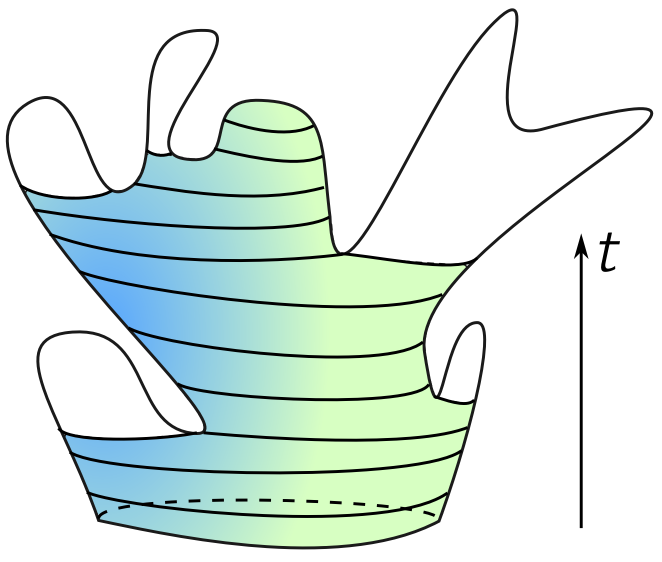
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.

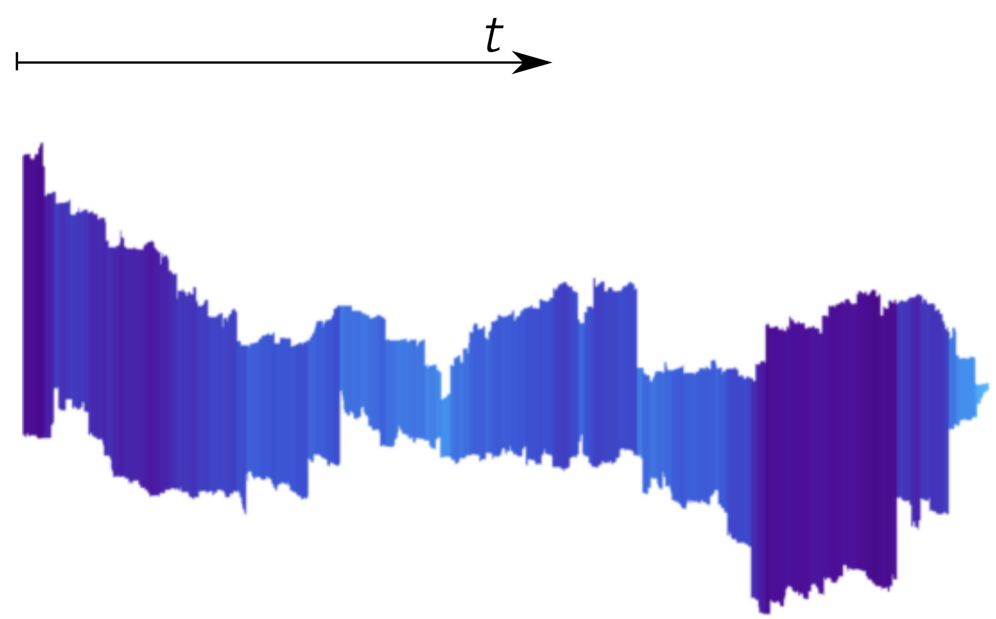




Growth-fragmentation process

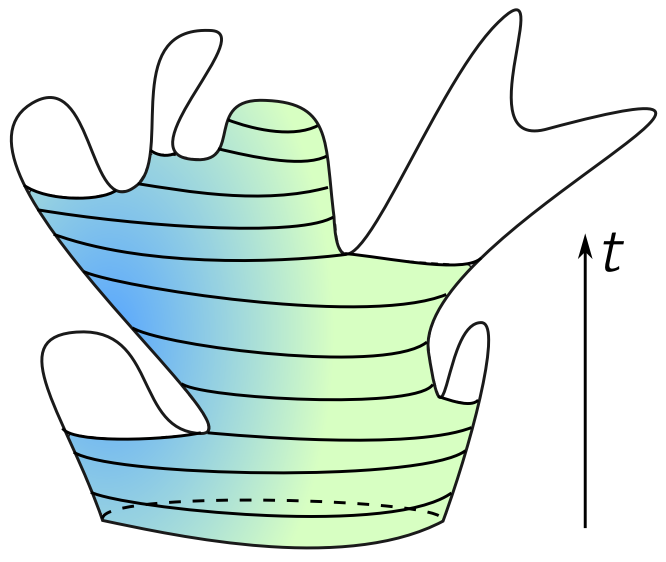
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.

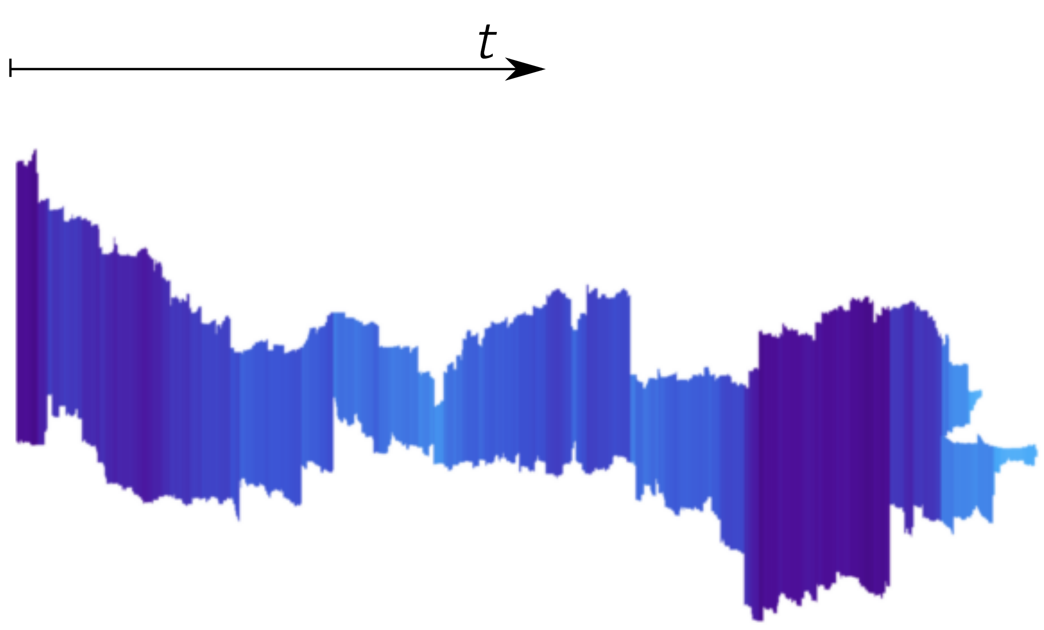




Growth-fragmentation process

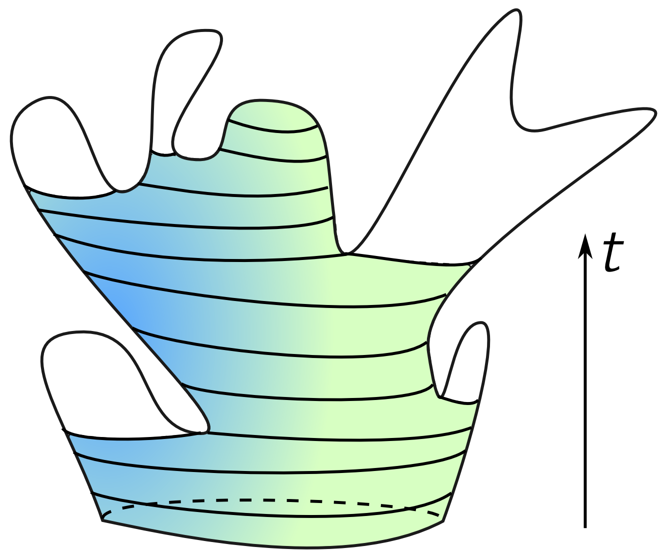
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.

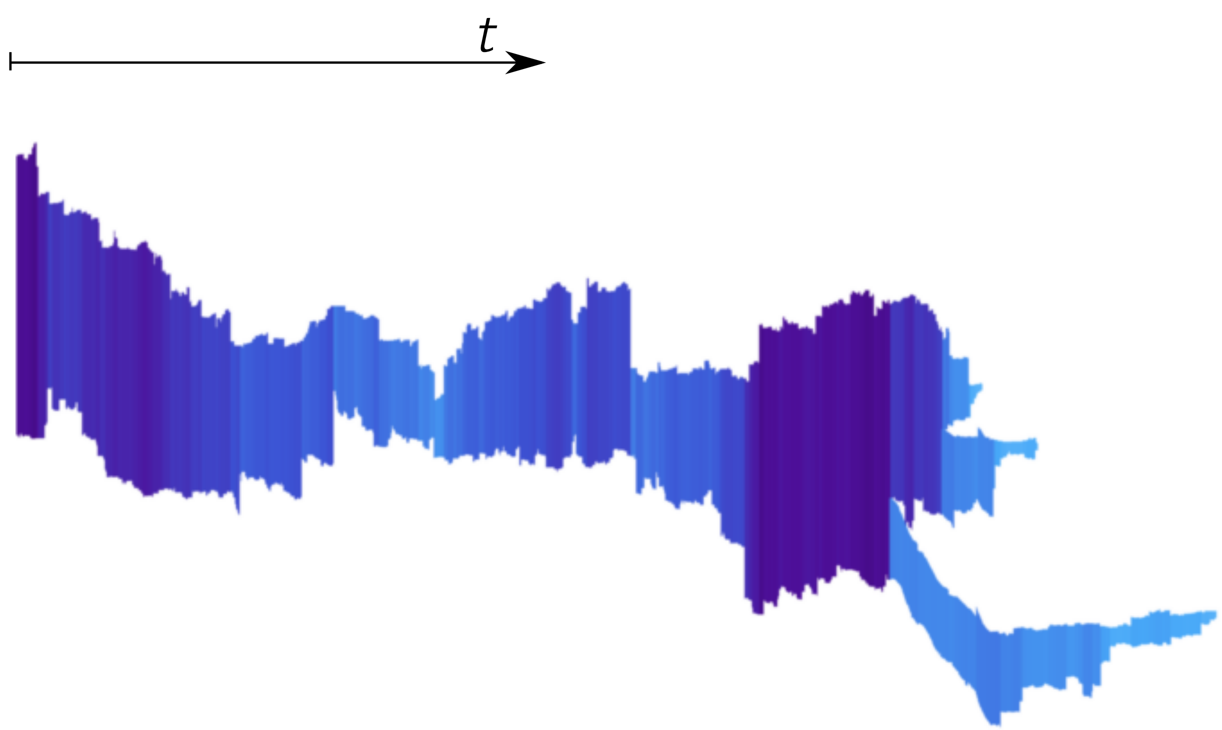




Growth-fragmentation process

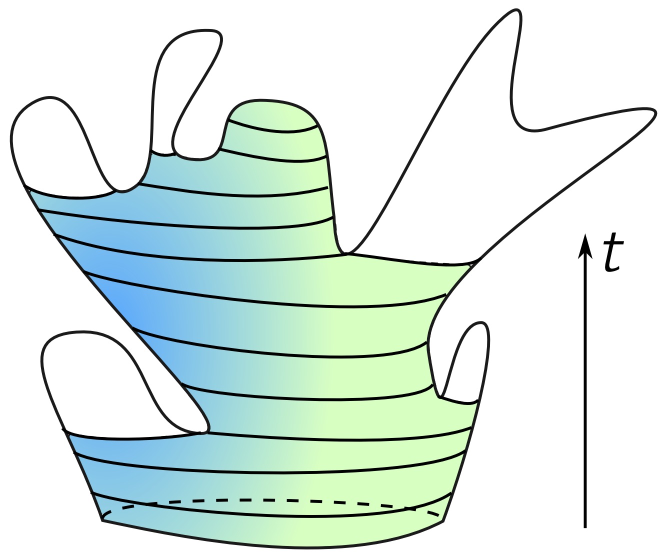
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.

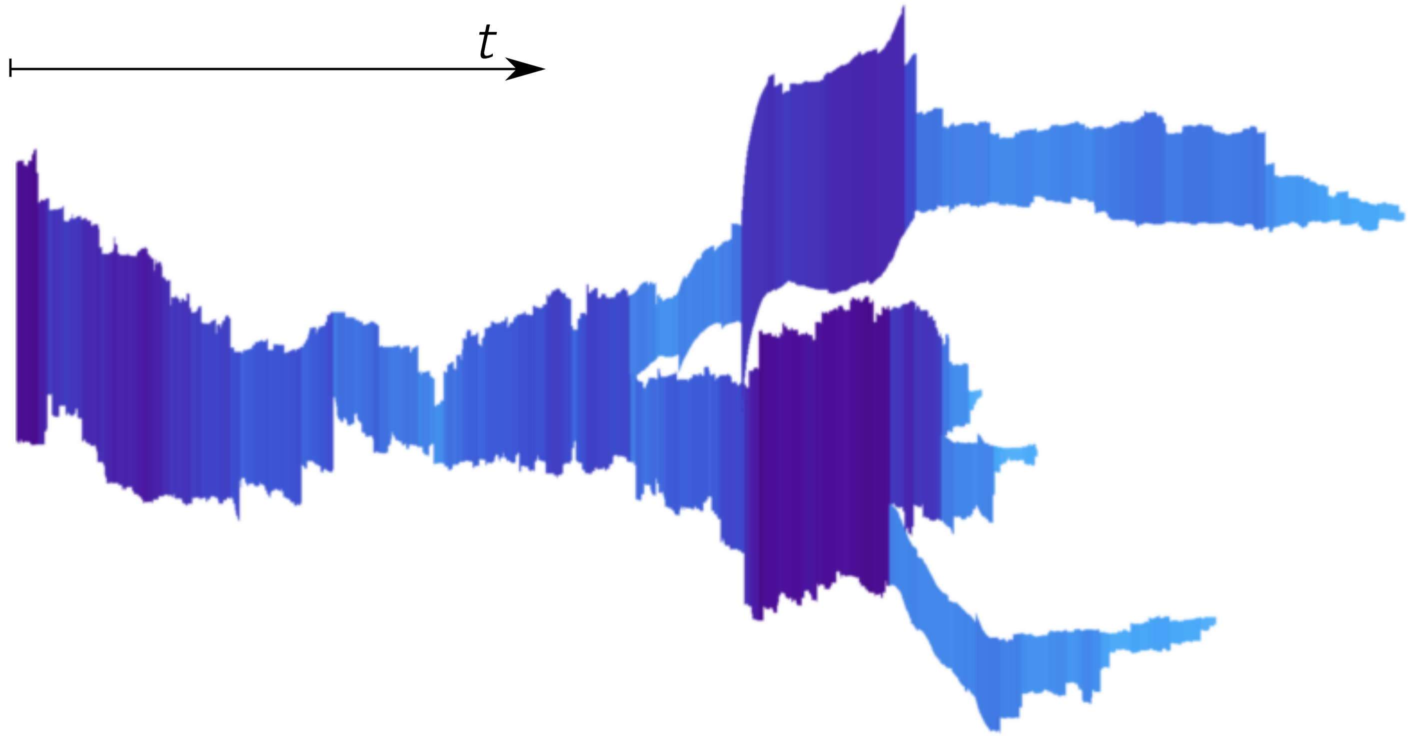




Growth-fragmentation process

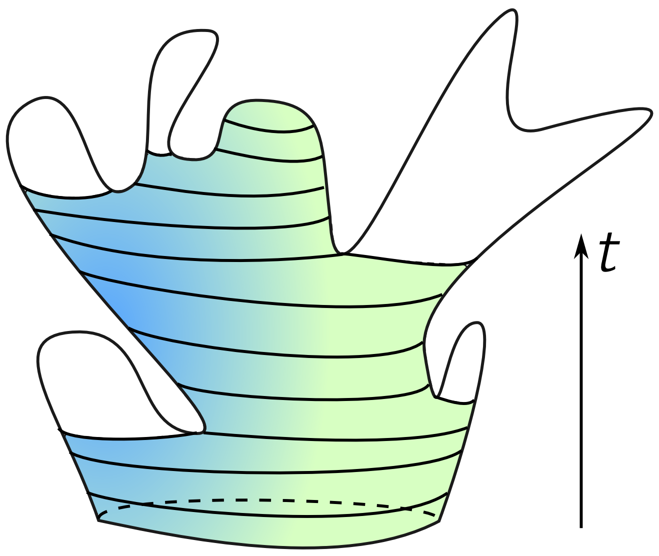
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.

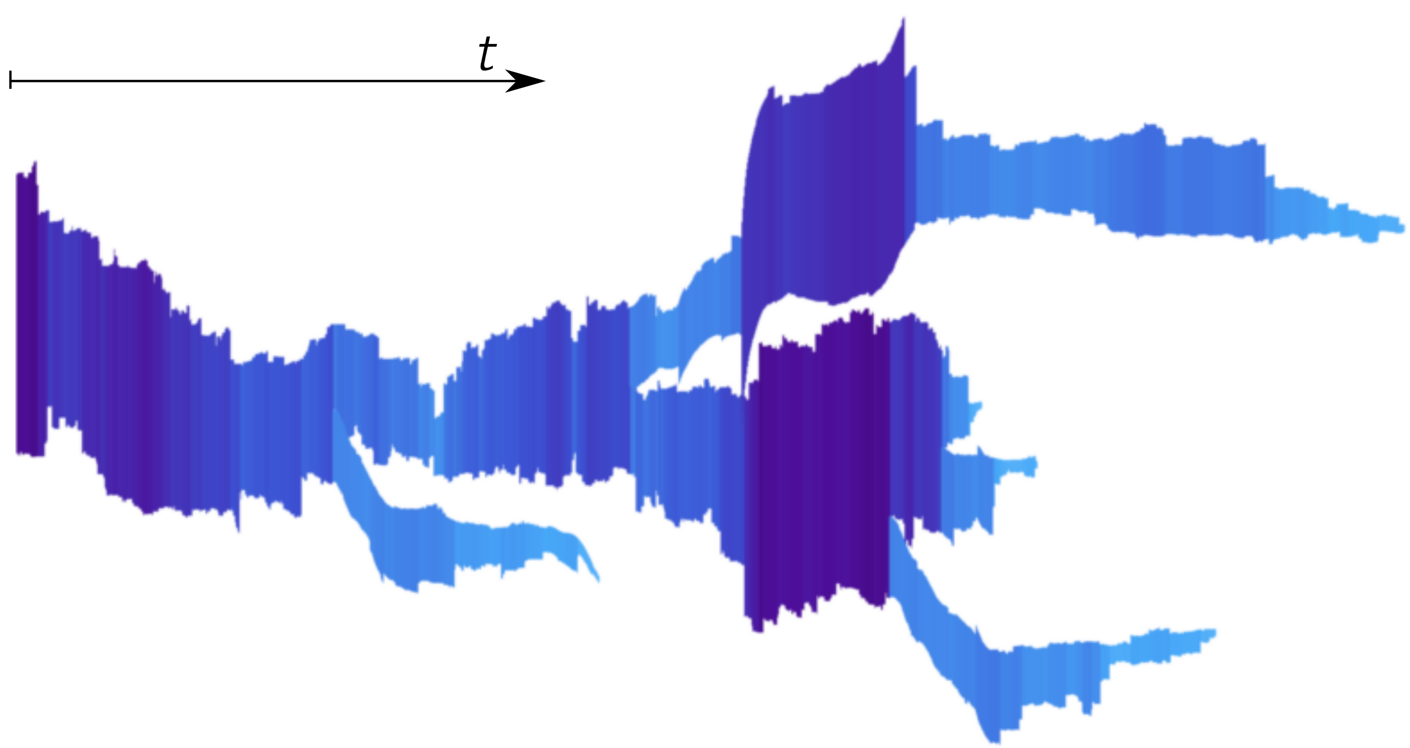




Growth-fragmentation process

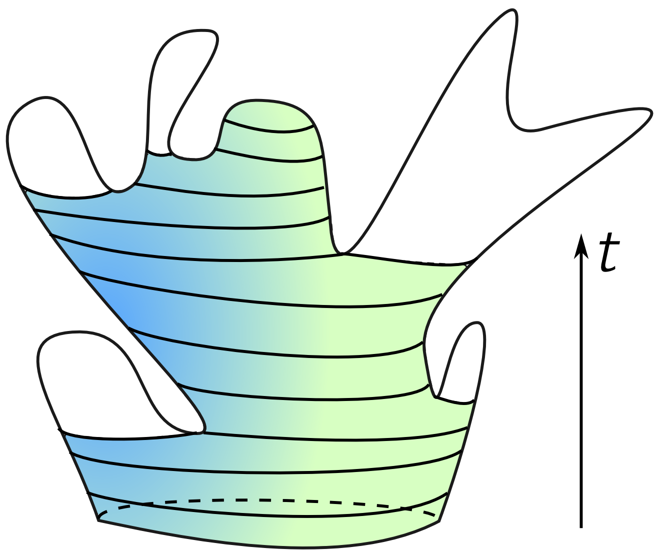
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.

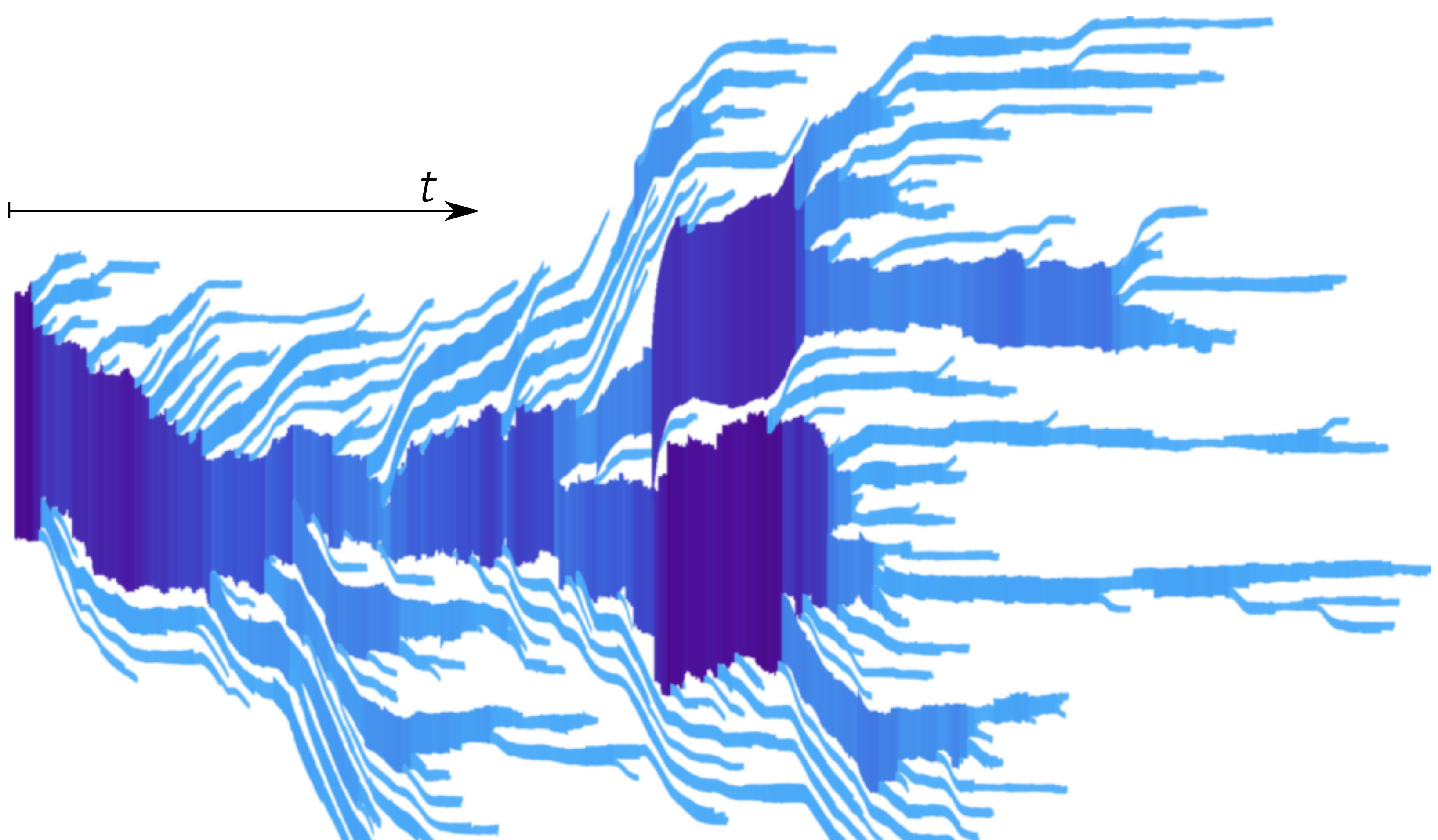




Growth-fragmentation process

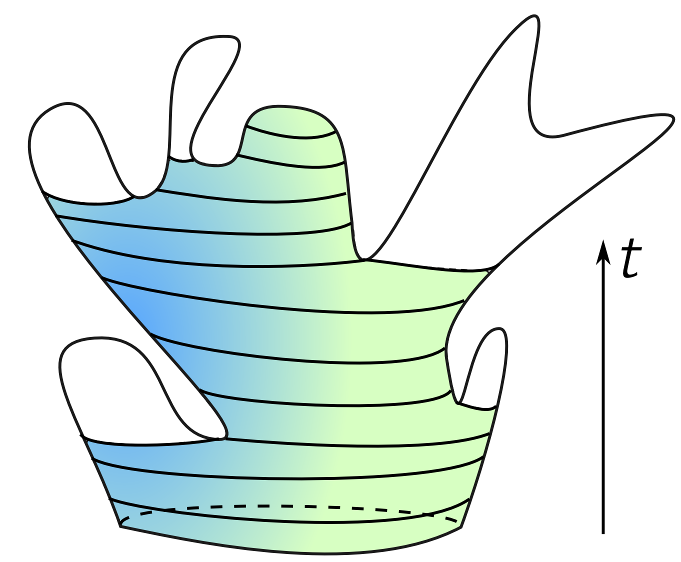
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.

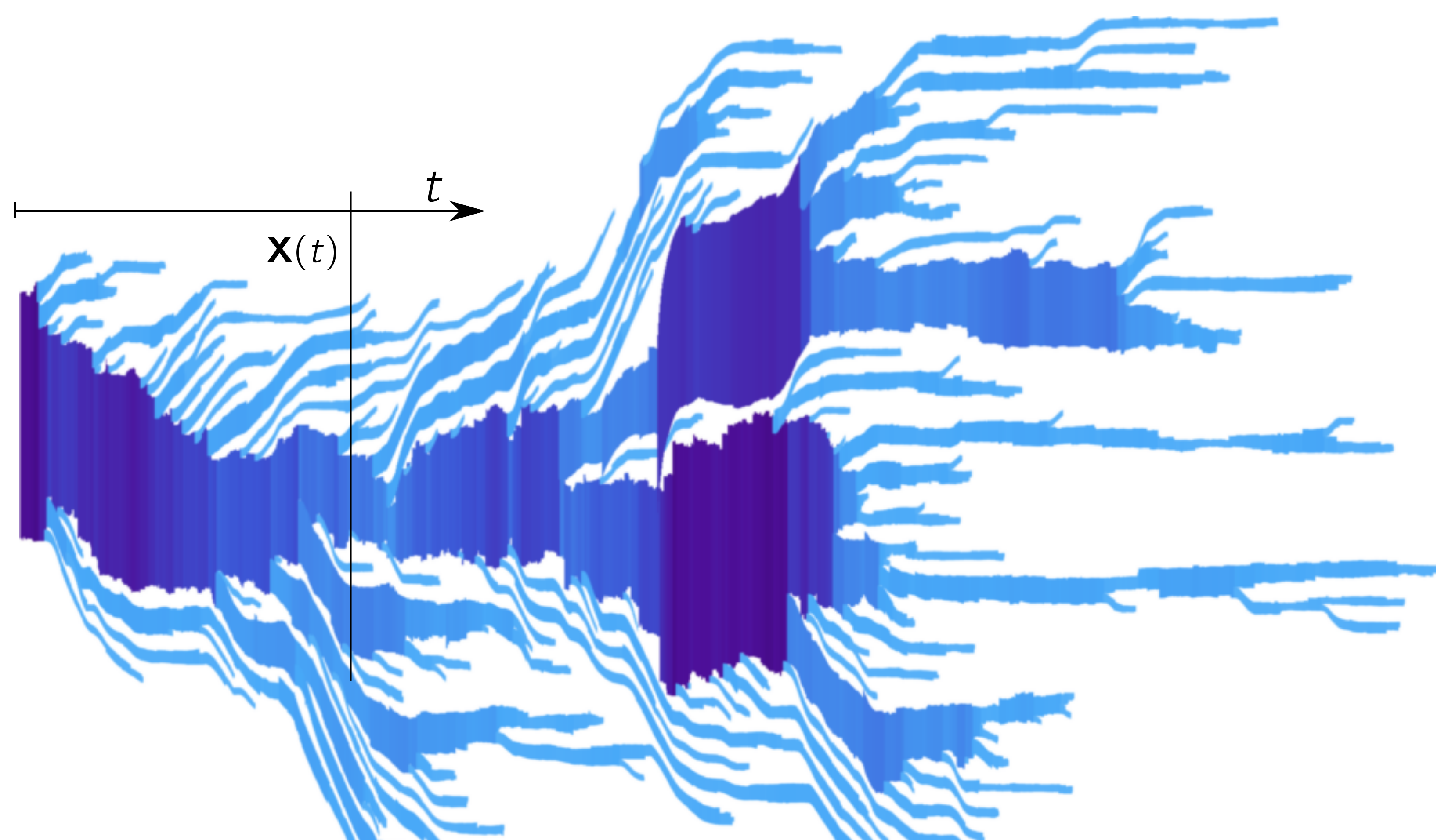




Growth-fragmentation process

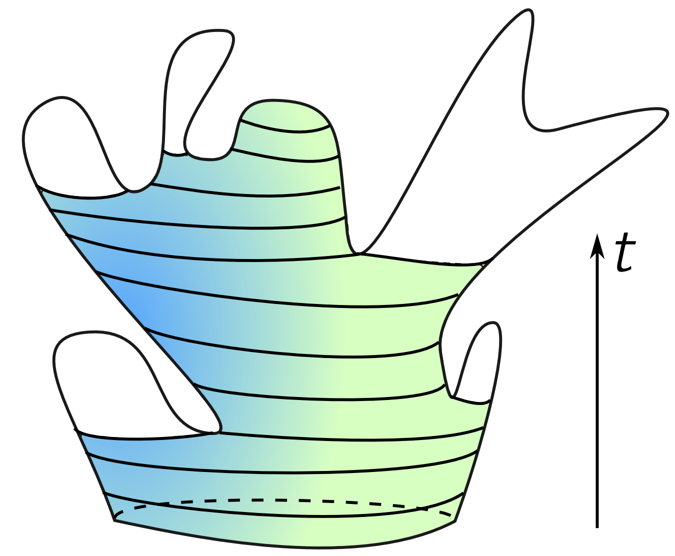
- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.
- Alors $\mathbf{X}_t^{(a)}$ est le processus des tailles des cycles en vie au temps t.

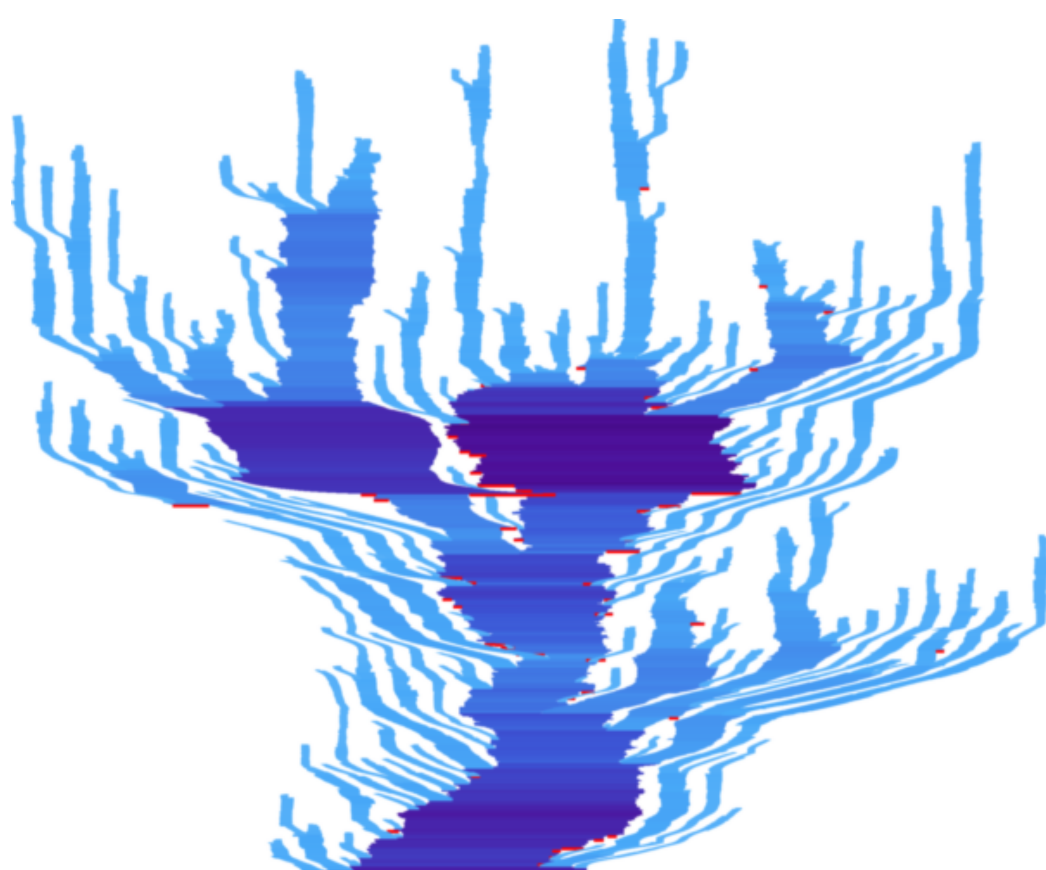


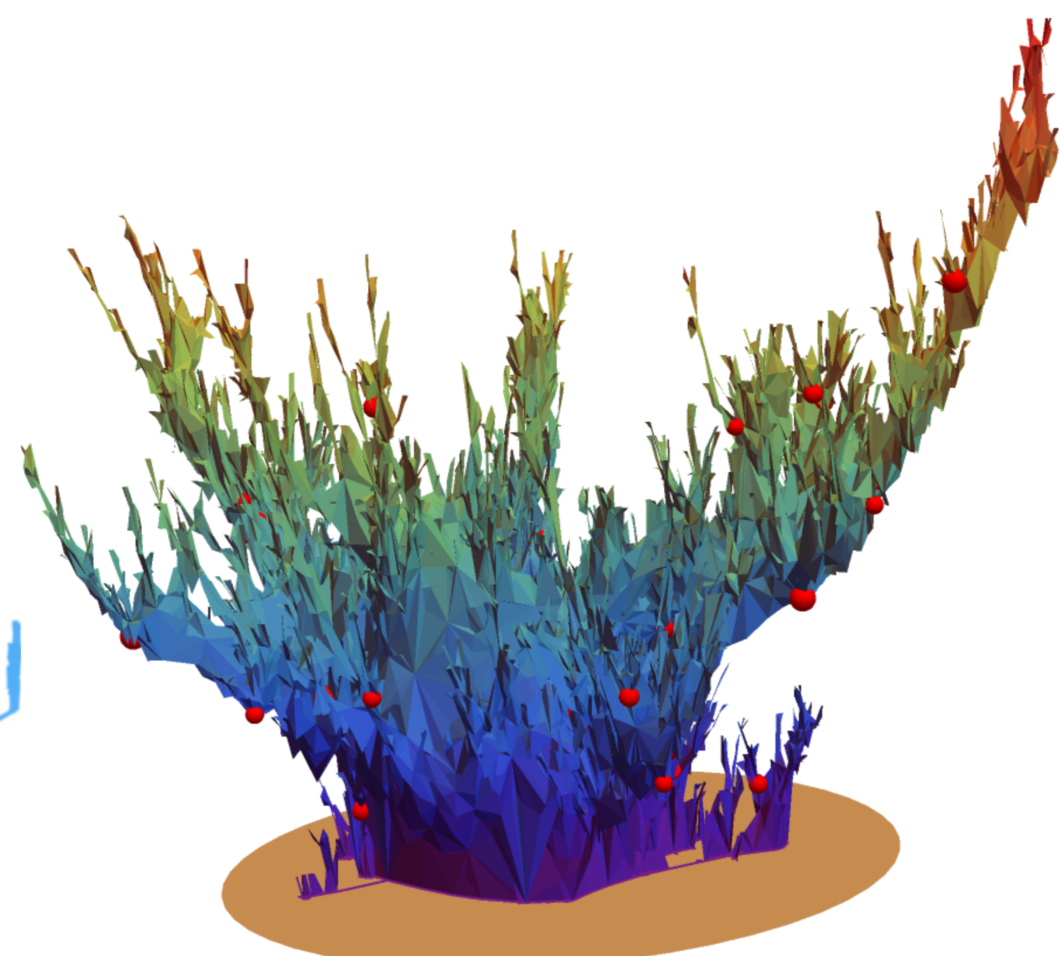


Growth-fragmentation process

- On a un processus autosimilaire (X_t) décrivant la limite d'échelle du processus du périmètre du *locally largest* cycle.
- Pour chaque saut négatif de ce processus on lui colle une copie remise à l'échelle de X.
- Alors $\mathbf{X}_t^{(a)}$ est le processus des tailles des cycles en vie au temps t.

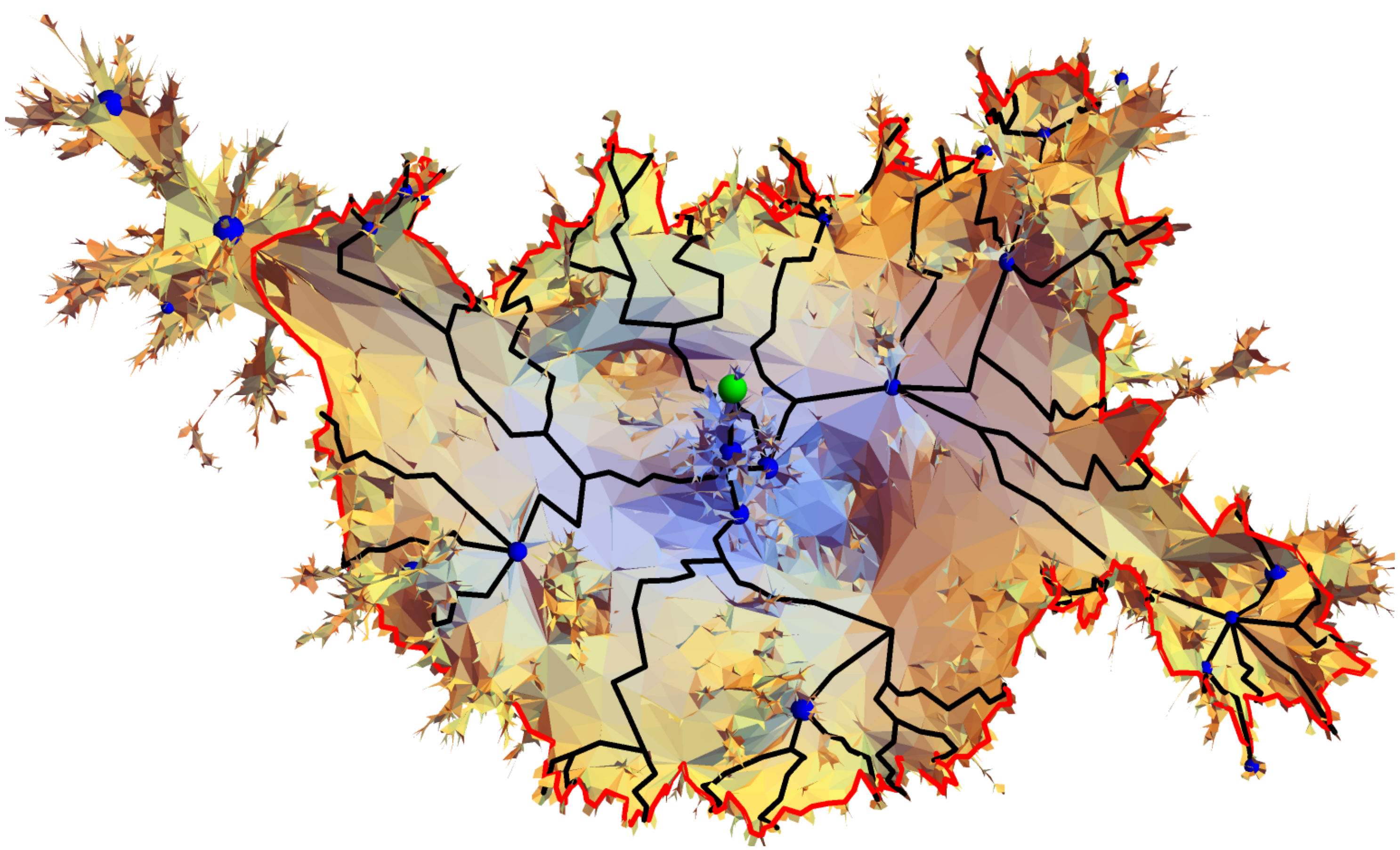






Ce qu'il reste à faire

- Recoller les cycles dans le continu
- Définir des géodésiques
- Créer la sphere stable continue (et l'étudier, topologie, dimension de Hausdorff...)
- Montrer la convergence des modèles discrets



Merci pour votre attention