

Percolation presque-critique et criticalité auto-organisée en deux dimensions

Pierre Nolin (ETH Zürich)

en collaboration avec :

Rob van den Berg (CWI and VU, Amsterdam)

Demeter Kiss



Journée en hommage à Jacques Neveu, 23 mai 2017

Criticalité auto-organisée

En mécanique statistique, phénomène de *criticalité auto-organisée* :

- ▶ apparition spontanée d'un régime critique (sans ajustement d'un paramètre),

Criticalité auto-organisée

En mécanique statistique, phénomène de *criticalité auto-organisée* :

- ▶ apparition spontanée d'un régime critique (sans ajustement d'un paramètre),
- ▶ peut être utilisé pour expliquer l'apparition de complexité dans la nature (formes fractales « universelles »).

Criticalité auto-organisée

En mécanique statistique, phénomène de *criticalité auto-organisée* :

- ▶ apparition spontanée d'un régime critique (sans ajustement d'un paramètre),
- ▶ peut être utilisé pour expliquer l'apparition de complexité dans la nature (formes fractales « universelles »).
- ▶ Ici : en lien avec la transition de phase de la percolation indépendante en 2D (maintenant très bien comprise : Lawler, Schramm, Smirnov, Werner, 1999–2001).

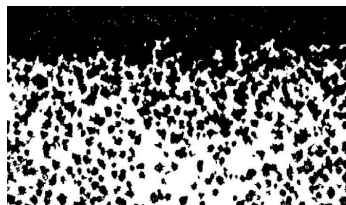
Criticalité auto-organisée

En mécanique statistique, phénomène de *criticalité auto-organisée* :

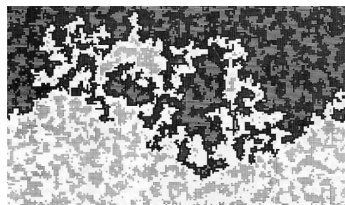
- ▶ apparition spontanée d'un régime critique (sans ajustement d'un paramètre),
- ▶ peut être utilisé pour expliquer l'apparition de complexité dans la nature (formes fractales « universelles »).
- ▶ Ici : en lien avec la transition de phase de la percolation indépendante en 2D (maintenant très bien comprise : Lawler, Schramm, Smirnov, Werner, 1999–2001).
- ▶ \rightsquigarrow « formes » aléatoires liées au processus SLE (Schramm-Loewner Evolution) de paramètre $\kappa = 6$ (\leftrightarrow régime critique de la percolation).

Criticalité auto-organisée

Interfaces créées par des particules qui diffusent (Gouyet, Rosso, Sapoval, 1985)



(expérimentalement)

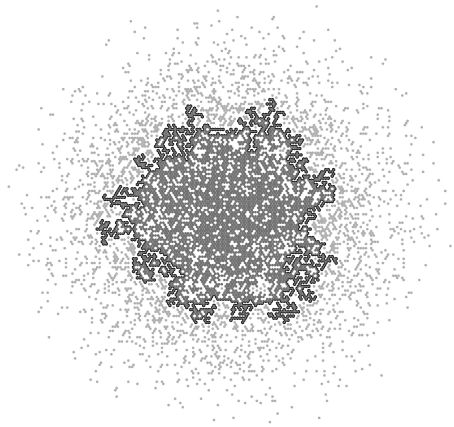


(numériquement)

Observation : interfaces fractales, de dimension $D_f = 1.76 \pm 0.02$ ($\frac{7}{4}$ = dimension des interfaces en percolation critique).

Géométrie des fronts de diffusion : « universalité »

Modèle : n particules ($n \gg 1$) partant de 0, marches aléatoires indépendantes.

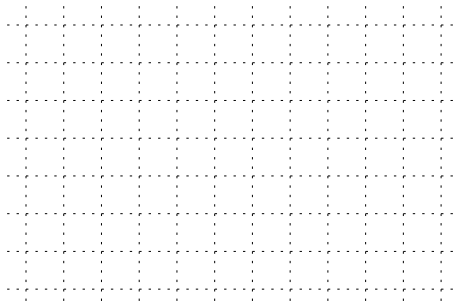


Pour $t_n = \lambda n$, avec $\lambda < \lambda_c$: frontière macroscopique $\simeq SLE(6)$, qui décrit les interfaces de percolation critique (N., 2006–9)

Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

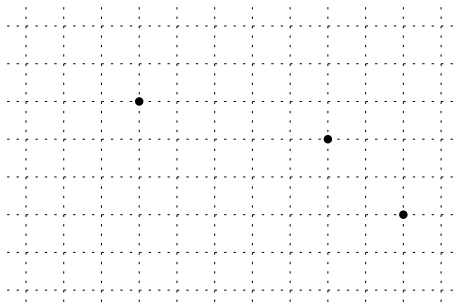
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

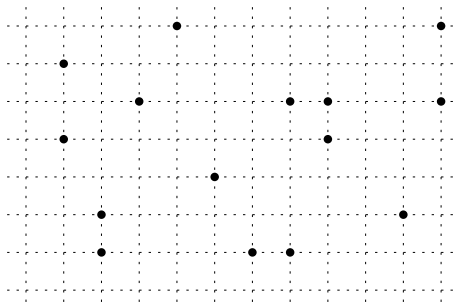
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

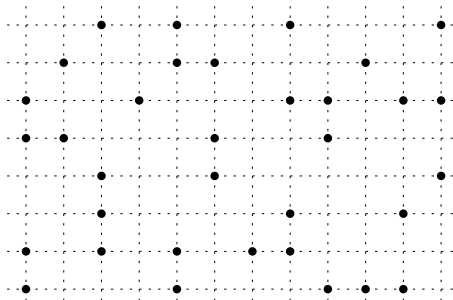
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

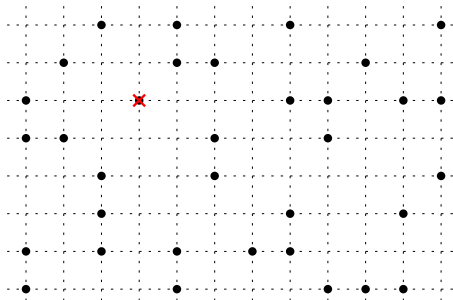
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

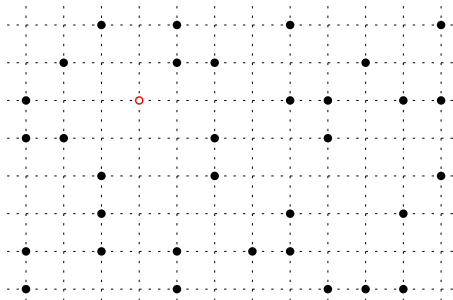
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

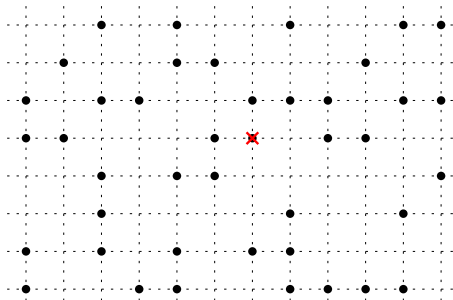
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)
- ▶ \rightsquigarrow l'arbre « brûle » (disparaît) immédiatement



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

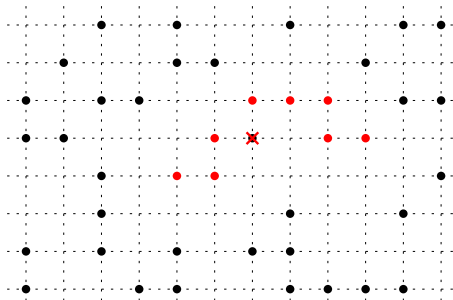
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)
- ▶ \rightsquigarrow l'arbre « brûle » (disparaît) immédiatement



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

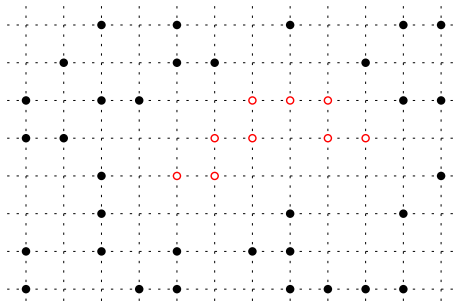
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)
- ▶ \rightsquigarrow l'arbre « brûle » (disparaît) immédiatement



Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

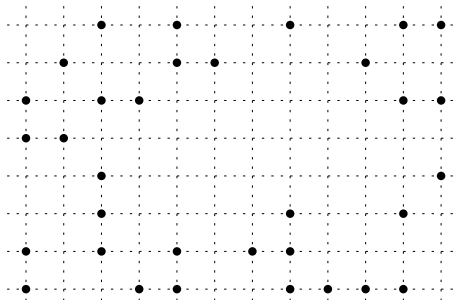
- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)
- ▶ \rightsquigarrow l'arbre « brûle » (disparaît) immédiatement
- ▶ et aussi toute sa composante connexe



Feux de forêt

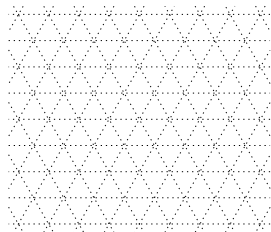
Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)
- ▶ \rightsquigarrow l'arbre « brûle » (disparaît) immédiatement
- ▶ et aussi toute sa composante connexe



Percolation indépendante

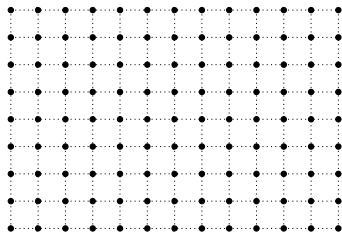
Percolation indépendante (Broadbent, Hammersley, 1957)



Percolation par sites sur \mathbb{T}

Les sommets sont

- ▶ occupés / noirs (p)
- ▶ vacants / blancs ($1 - p$)



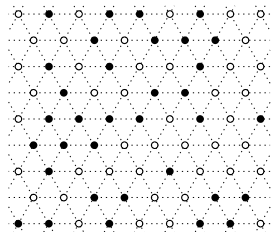
Percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^2

Les arêtes sont

- ▶ ouvertes / gardées (p)
- ▶ fermées / effacées ($1 - p$)

Percolation indépendante

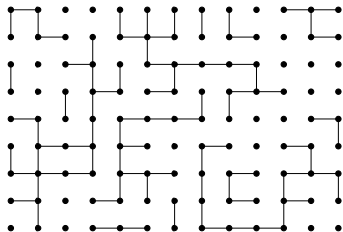
Percolation indépendante (Broadbent, Hammersley, 1957)



Percolation par sites sur \mathbb{T}

Les sommets sont

- ▶ occupés / noirs (p)
- ▶ vacants / blancs ($1 - p$)



Percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^2

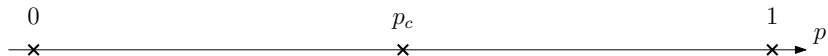
Les arêtes sont

- ▶ ouvertes / gardées (p)
- ▶ fermées / effacées ($1 - p$)

↷ connectivité ?

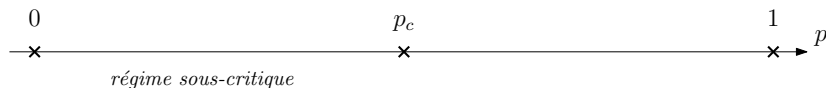
Percolation indépendante

Percolation : transition de phase lorsque p varie



Percolation indépendante

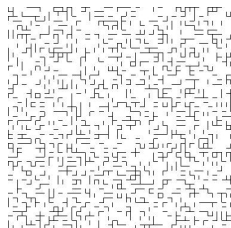
Percolation : transition de phase lorsque p varie



pas de c.c. ∞

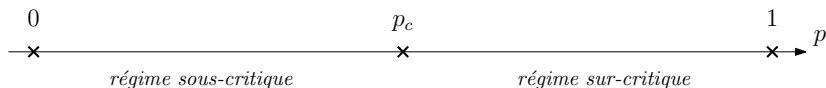
décroissance exponentielle
pour la taille des c.c.

**comportement trivial
à grande échelle**

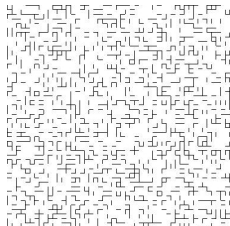


Percolation indépendante

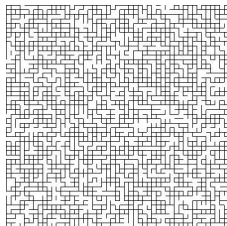
Percolation : transition de phase lorsque p varie



pas de c.c. ∞
décroissance exponentielle
pour la taille des c.c.
**comportement trivial
à grande échelle**

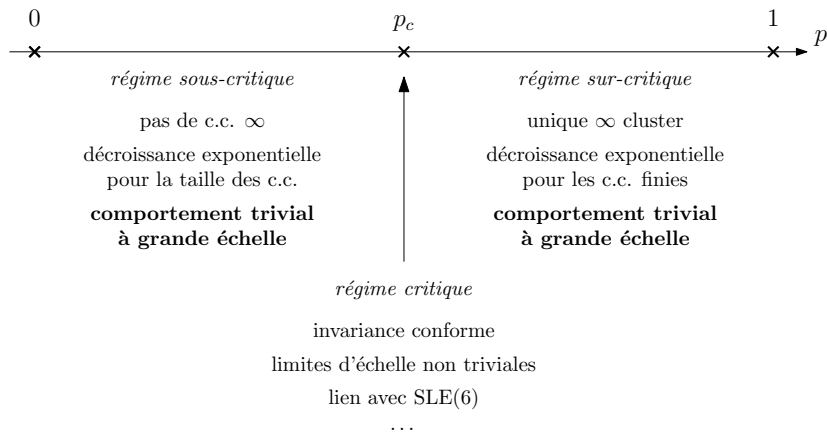


unique c.c. ∞
décroissance exponentielle
pour les c.c. finies
**comportement trivial
à grande échelle**

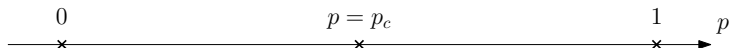


Percolation indépendante

Percolation : transition de phase lorsque p varie



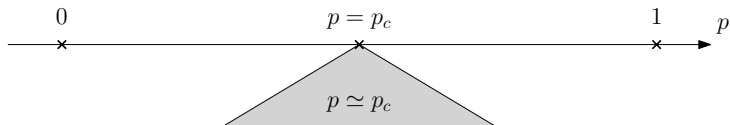
Régime presque-critique



régime critique ($p = p_c$)

par ex. $\mathbb{P}_{p_c} \left(\left(\begin{array}{c} \text{---}^N \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ 0 \end{array} \right) \right) = N^{-5/48+o(1)}$
($N \rightarrow \infty$)

Régime presque-critique



régime critique ($p = p_c$)

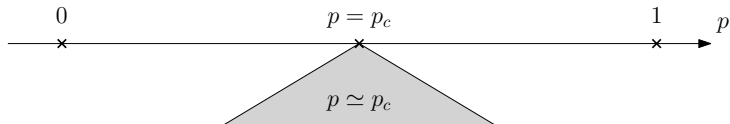
par ex. $\mathbb{P}_{p_c} \left(\left(\text{circle with } N \text{ boundary and } 0 \text{ center} \right) \right) = N^{-5/48+o(1)}$
($N \rightarrow \infty$)

“scaling relations”
(Kesten 1987)



régime presque-critique ($p \simeq p_c$)

Régime presque-critique



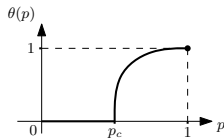
régime critique ($p = p_c$)

par ex. $\mathbb{P}_{p_c} \left(\left(\text{circle with } N \text{ points and } 0 \text{ inside} \right) \right) = N^{-5/48+o(1)}$
 ($N \rightarrow \infty$)

“scaling relations”
 (Kesten 1987)



régime presque-critique ($p \simeq p_c$)

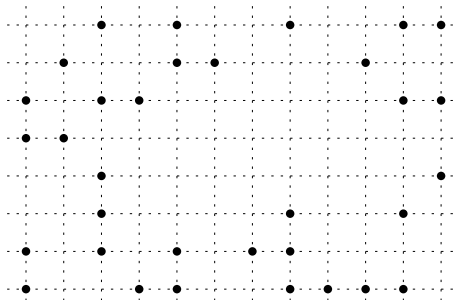


par ex. densité $\theta(p) = (p - p_c)^{5/36+o(1)}$
 ($p \searrow p_c$)

Feux de forêt

Feux de forêt sur \mathbb{Z}^2 (Drossel, Schwabl, 1992)

- ▶ des arbres apparaissent (indép.) à taux 1
- ▶ frappés par la foudre à un taux ξ ($\rightarrow 0$)
- ▶ \rightsquigarrow l'arbre « brûle » (disparaît) immédiatement
- ▶ et aussi toute sa composante connexe



Feux de forêt

Soit t_c t.q. densité d'arbres (sans les feux) = $p_c^{\text{site}}(\mathbb{Z}^2)$:

$$\mathbb{P}_\xi(0 \text{ brûle dans } [0, t_c]) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0.$$

Question : Que se passe-t-il après l'instant t_c ?

- (1) description qualitative autour de t_c ?
- (2) Pour un $t > t_c$ fixé, $\mathbb{P}_\xi(0 \text{ brûle dans } [0, t]) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} ?$
- (3) mesure stationnaire ?
- (4) vitesse de convergence vers l'équilibre (i.e. temps de mélange) ?

\leadsto processus *non-monotone* (effets concurrents) !

Feux de forêt

Pour le moment réponse (satisfaisante) à (1), et réponse partielle à (2) (travail en cours)

Théorème (van den Berg, N., 2017+)

Pour un certain $\delta > 0$ (indépendant de ξ),

$$\mathbb{P}_\xi(0 \text{ brûle dans } [0, t_c + \delta]) \xrightarrow[\xi \rightarrow 0]{} 0$$

+ description qualitative du processus dans $[t_c, t_c + \delta]$ (feux successifs autour de 0, de plus en plus localisés).

\rightsquigarrow comportement très similaire à *percolation gelée par volume* : on « gèle » les composantes connexes dès qu'elles atteignent un volume $\geq N$ (i.e. leur croissance est stoppée)

Percolation gelée

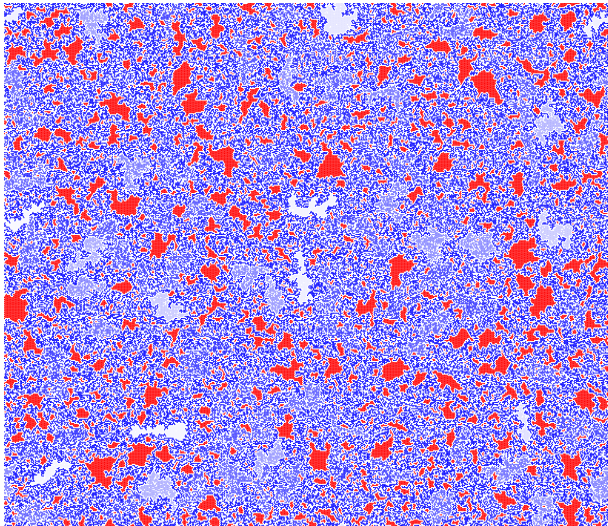
Percolation gelée (Aldous, 2000) sur $G = (V, E)$: $N \in [1, \infty]$,
« taille » = diamètre, volume (# sites)...

- ▶ couplage usuel : $(\tau_v)_{v \in V}$ i.i.d. $\text{Unif}([0, 1])$, chaque $v \in V$ essaie de devenir occupé à l'instant τ_v ,
- ▶ chaque composante connexe arrête de croître (« gèle ») lorsque sa taille $\geq N$.

i.e. chaque $v \in V$ peut devenir occupé ssi il n'est pas adjacent à une composante connexe de taille $\geq N$.

Remarque : La frontière d'une composante gelée reste vacante jusqu'à la fin (instant $t = 1$).

Percolation gelée



Percolation gelée

Principaux résultats :

- ▶ $N = \infty$:
 - ▶ arbre binaire : existence + calculs explicites (Aldous, 2000)
 - ▶ réseaux 2D : non-existence (Benjamini, Schramm, 2000)

Percolation gelée

Principaux résultats :

- ▶ $N = \infty$:
 - ▶ arbre binaire : existence + calculs explicites (Aldous, 2000)
 - ▶ réseaux 2D : non-existence (Benjamini, Schramm, 2000)
- ▶ $N < \infty, N \rightarrow \infty$:
 - ▶ « taille » = diamètre :
 - ▶ existence de c.c. macroscopiques non gelées (van den Berg, de Lima, N., 2012) :

$$\forall 0 < a < b < 1, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(\text{diam}(\mathcal{C}_1(0)) \in [aN, bN]) > 0$$

Percolation gelée

Principaux résultats :

- ▶ $N = \infty$:
 - ▶ arbre binaire : existence + calculs explicites (Aldous, 2000)
 - ▶ réseaux 2D : non-existence (Benjamini, Schramm, 2000)
- ▶ $N < \infty, N \rightarrow \infty$:
 - ▶ « taille » = diamètre :
 - ▶ existence de c.c. macroscopiques non gelées (van den Berg, de Lima, N., 2012) :

$$\forall 0 < a < b < 1, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(\text{diam}(C_1(0)) \in [aN, bN]) > 0$$

- ▶ prévalence de ces c.c. (Kiss, 2015) :

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(\text{diam}(C_1(0)) \in [aN, bN]) \xrightarrow{a \rightarrow 0, b \rightarrow 1} 1$$

+ toutes les c.c. gelées se forment dans la fenêtre presque critique

Percolation gelée

Principaux résultats :

- ▶ $N = \infty$:
 - ▶ arbre binaire : existence + calculs explicites (Aldous, 2000)
 - ▶ réseaux 2D : non-existence (Benjamini, Schramm, 2000)
- ▶ $N < \infty$, $N \rightarrow \infty$:
 - ▶ « taille » = diamètre :
 - ▶ existence de c.c. macroscopiques non gelées (van den Berg, de Lima, N., 2012) :

$$\forall 0 < a < b < 1, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(\text{diam}(C_1(0)) \in [aN, bN]) > 0$$

- ▶ prévalence de ces c.c. (Kiss, 2015) :

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N(\text{diam}(C_1(0)) \in [aN, bN]) \xrightarrow{a \rightarrow 0, b \rightarrow 1} 1$$

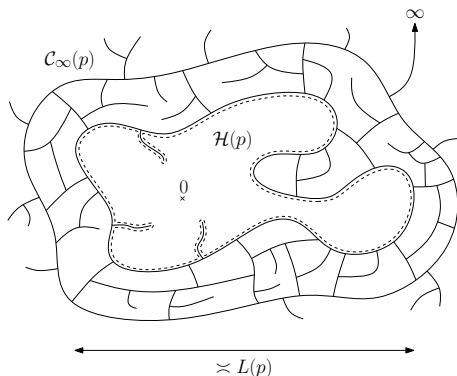
+ toutes les c.c. gelées se forment dans la fenêtre presque critique

- ▶ Remarque : les « conditions au bord » ont un impact important (van den Berg, N., 2016)

Percolation gelée

- ▶ $N < \infty$, $N \rightarrow \infty$: désormais, « taille » = volume
 \rightsquigarrow lien avec les feux de forêt $\xi^{-1} \leftrightarrow N$ (une c.c. brûle à un
 taux $\xi \times \text{Volume}$)

Objet important : « trous » dans la c.c. infinie $\mathcal{C}_\infty(p)$ ($L(p)$ = longueur caractéristique)



Percolation gelée par volume

Proposition (van den Berg, N., 2014)

Considérons le processus dans une boîte de côté $C\sqrt{N}$ ($C > 0$) :

$$\mathbb{P}_N^{B_{C\sqrt{N}}}(0 \text{ gèle}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi(C),$$

où $\phi(C) = \frac{1}{C^2}$ for $C > 1$, et $\phi(C) = 0$ pour $C < 1$.

~> Peut-on simplement faire $C \rightarrow \infty$, et échanger les limites ?

Percolation gelée par volume

Proposition (van den Berg, N., 2014)

Considérons le processus dans une boîte de côté $C\sqrt{N}$ ($C > 0$) :

$$\mathbb{P}_N^{B_{C\sqrt{N}}}(0 \text{ gèle}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi(C),$$

où $\phi(C) = \frac{1}{C^2}$ for $C > 1$, et $\phi(C) = 0$ pour $C < 1$.

\leadsto Peut-on simplement faire $C \rightarrow \infty$, et échanger les limites ?

Non ! \sqrt{N} = première échelle $m_1(N)$ dans une suite $(m_k(N))_{k \geq 1}$
d'échelles exceptionnelles

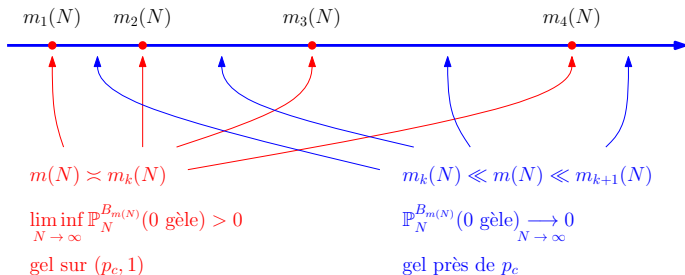
$$m_k(N) = N^{\delta_k + o(1)},$$

avec $\delta_1 = \frac{1}{2}$, et $\delta_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{96}\delta_k$ ($\delta_k \nearrow \delta_\infty = \frac{48}{91}$).

Percolation gelée par volume

Ces échelles sont exceptionnelles : dans une boîte $B_{m(N)}$,

Théorème (van den Berg, N., 2014)



c.c. dans la configuration finale :

macroscopiques (gelées / non-gelées)

microscopiques (volume $O(1)$)

mésoscopiques (volume $N^{\delta+o(1)}$)

($0 < \delta < 1$)

Percolation gelée par volume

Théorème (Van den Berg, Kiss, N., 2015)

Pour le processus dans tout le plan :

- ▶ $\mathbb{P}_N(0 \text{ gèle}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$
- ▶ **déconcentration** pour la c.c. finale de 0 : mésoscopique (volume aléatoire entre 1 et N),
- ▶ de plus en plus de c.c. gelées entourant 0.

Percolation gelée par volume

Théorème (Van den Berg, Kiss, N., 2015)

Pour le processus dans tout le plan :

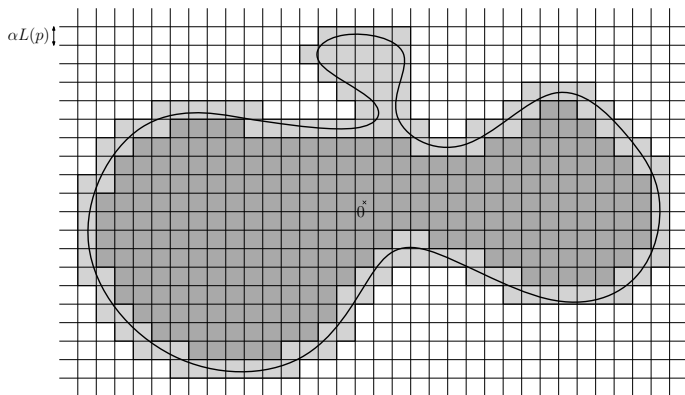
- ▶ $\mathbb{P}_N(0 \text{ gèle}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$
- ▶ **déconcentration** pour la c.c. finale de 0 : mésoscopique (volume aléatoire entre 1 et N),
- ▶ de plus en plus de c.c. gelées entourant 0.

Principales difficultés :

- ▶ comprendre la géométrie des trous succesifs,

Percolation gelée par volume

Propriété d'« approximabilité » :



\leadsto approximation de $\mathcal{H}(p)$ avec des carrés de côté $\alpha L(p)$

Percolation gelée par volume

Théorème (Van den Berg, Kiss, N., 2015)

Pour le processus dans tout le plan :

- ▶ $\mathbb{P}_N(0 \text{ gèle}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$,
- ▶ **déconcentration** pour la c.c. finale de 0 : mésoscopique (volume aléatoire entre 1 et N),
- ▶ de plus en plus de c.c. gelées entourant 0.

Principales difficultés :

- ▶ comprendre la géométrie des trous succesifs,
- ▶ une formule précise pour $\theta(p)$ est nécessaire (utilise la limite d'échelle de toute la percolation presque-critique) :
 $\theta(p) \sim c\pi_1(L(p)) (p \searrow p_c)$,

Percolation gelée par volume

Théorème (Van den Berg, Kiss, N., 2015)

Pour le processus dans tout le plan :

- ▶ $\mathbb{P}_N(0 \text{ gèle}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$
- ▶ **déconcentration** pour la c.c. finale de 0 : mésoscopique (volume aléatoire entre 1 et N),
- ▶ de plus en plus de c.c. gelées entourant 0.

Principales difficultés :

- ▶ comprendre la géométrie des trous succesifs,
- ▶ une formule précise pour $\theta(p)$ est nécessaire (utilise la limite d'échelle de toute la percolation presque-critique) :
 $\theta(p) \sim c\pi_1(L(p)) (p \searrow p_c),$
- ▶ comparer le processus dans tout le plan / des domaines finis.

Fin

Merci !

